# 2

# INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Si chiamano *equazioni differenziali* le equazioni in cui le incognite sono funzioni di una o più variabili indipendenti, ed in cui compaiano non solo le funzioni, ma anche le loro derivate. Nel caso in cui si abbia una sola variabile indipendente si parla di *equazioni differenziali ordinarie*. Nel caso di più variabili indipendenti si parla di *equazioni differenziali alle derivate parziali*. In questo capitolo introdurremo alcuni aspetti della teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

Useremo la notazione classica dei testi che trattano di sistemi dinamici, e che abbiamo già introdotto nel primo capitolo. Questa notazione tiene conto del fatto che stiamo cercando di descrivere mediante un modello l'evoluzione temporale di un sistema reale. Quindi identificheremo la variabile indipendente $t$ con il tempo, e parleremo spesso di evoluzione temporale del sistema per far riferimento all'andamento delle soluzioni.[1]

Un'equazione differenziale ordinaria avrà la forma generale

$$\Phi(t, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0 \ .$$

Diremo che si tratta di un'equazione differenziale di ordine $n$ – il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione stessa. Se possiamo risolvere univocamente questa equazione rispetto alla sua derivata di ordine massimo potremo anche scrivere

$$x^{(n)} = f(t, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) \ ;$$

diremo in questo caso che l'equazione è in *forma normale*.

---

[1] Va da sé che un tal linguaggio sarebbe del tutto inappropriato in un testo di Analisi Matematica, ove si considerano problemi astratti indipendentemente dalla possibilità di applicarli a modelli del mondo reale. Ma riteniamo che un tal piccolo abuso di linguaggio sia perfettamente naturale ed accettabile in un testo il cui scopo è discutere di sistemi dinamici ed in particolare di Meccanica Classica.

Come si è detto nel primo capitolo, risolvere l'equazione significa trovare una funzione $x(t)$ che sostituita assieme alle sue derivate temporali nell'equazione la trasformi in un'identità in $t$. Al procedimento di soluzione dell'equazione si dà il nome di *integrazione*.

## 2.1 La riduzione alle quadrature

Iniziamo la discussione con il metodo classico di *riduzione alle quadrature*, ovvero di risoluzione di un'equazione differenziale mediante il calcolo di integrali. Ne illustreremo l'applicazione in due casi:

(i) l'equazione $\dot{x} = f(t)$, ovvero il problema di ritrovare la primitiva di una funzione ed il suo collegamento a quello del calcolo di un'area;

(ii) l'equazione $\dot{x} = f(x)$, che descrive un sistema autonomo.

Nel corso della discussione parleremo anche del *problema di Cauchy*,[2] o *ai dati iniziali*. Nel trattare il secondo punto parleremo anche delle *soluzioni stazionarie* o *di equilibrio*.

### 2.1.1 *Il calcolo della primitiva ed il problema delle aree*

Iniziamo col considerare il caso particolarmente semplice di un'equazione della forma

$$\dot{x} = f(t) \ , \tag{2.1}$$

in cui il termine noto non dipenda da $x$. La funzione $f(t)$ potrà essere definita su tutto l'intervallo reale, o anche semplicemente su un intervallo aperto, e per semplicità la supporremo almeno continua. Supponiamo di voler tracciare l'andamento qualitativo della funzione $x(t)$, esattamente come nel primo corso di analisi matematica abbiamo appreso a tracciare il grafico di una funzione assegnata. Il problema qui è che non conosciamo la funzione, ma solo la sua derivata. L'informazione che abbiamo è del tipo illustrato nella figura 2.1: per ciascun valore di $t$ possiamo tracciare una famiglia di rette parallele che ci danno la tangente della funzione $x(t)$ cercata. Per ciascun punto della retta verticale di ascissa $t$ passa una di queste tangenti, ma non sappiamo a che altezza la curva $x(t)$ attraversi questa retta. Il problema è trovare una curva $x(t)$ che in ogni punto $\bigl(t, x(t)\bigr)$ abbia per tangente proprio una delle rette che abbiamo tracciato. In figura è rappresentata una possibile soluzione.

Un semplice sguardo alla figura suggerisce immediatamente che valgano le proprietà seguenti:

(i) traslando la soluzione rappresentata in direzione verticale di una quantità arbitraria si ottiene un'altra soluzione;

(ii) qualunque altra soluzione si ottiene per traslazione in direzione verticale di una soluzione nota;

(iii) fissato un valore $t_0$ arbitrario la famiglia di soluzioni viene parametrizzata dal valore $x_0$ della soluzione nel punto $t_0$.

[2] Augustin Louis Cauchy, nato a Parigi, 21 agosto 1789; morto a Sceaux, nei pressi di Parigi, 23 maggio 1857.

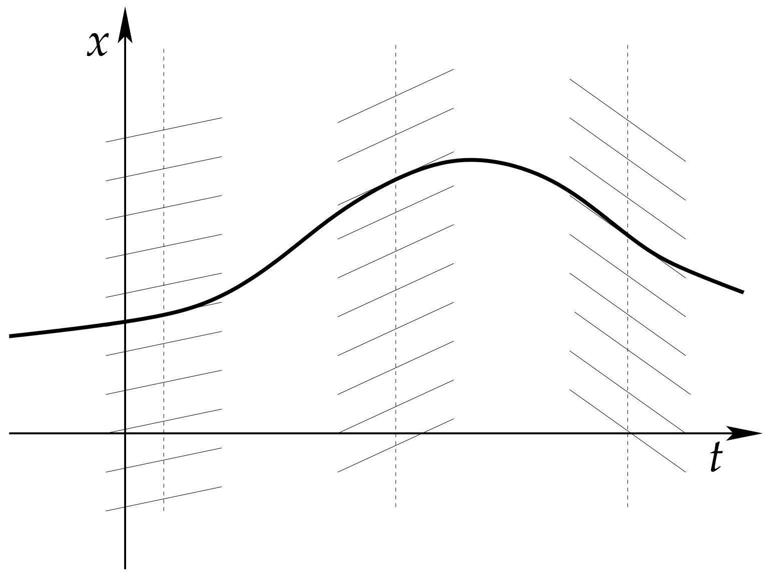


**Figura 2.1.** L'equazione differenziale $\dot{x} = f(t)$ determina nel piano $x, t$ un insieme di rette. La soluzione è una curva che in ogni punto $(t, x(t))$ ha per tangente la retta passante per quel punto.

Ci si domanda, ovviamente, se questo sia un inganno nascosto nell'ingenuità del disegno o un fatto reale.

Riformuliamo la prima proprietà così: *se $x(t)$ è una soluzione dell'equazione (2.1), allora anche $x(t)+c$ lo è, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$.* Si vede immediatamente che ciò è vero. Infatti, sostituendo nell'equazione si ha $\frac{d}{dt}(x+c) = \dot{x}$, ed il secondo membro non muta perché $f(t)$ non dipende da $x$.

La seconda proprietà si riconduce alla seguente affermazione: *se $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ sono due soluzioni dell'equazione (2.1) allora $x_2(t) = x_1(t)+c$, con $c \in \mathbb{R}$.* La dimostrazione è semplice: basta osservare che $\frac{d}{dt}(x_2 - x_1) = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 = 0$, e l'affermazione segue dalla formula di Lagrange,[3] o *formula degli incrementi finiti* .[4]

La terza proprietà richiede un po' più di attenzione. Riformuliamola come segue: per ogni condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ fissata esiste una soluzione che la soddisfa. È questo il problema *ai dati iniziali*, o problema *di Cauchy*. Ci si pone anche la domanda se questa soluzione sia unica, e se sia prolungabile a tutti i tempi.

Il caso che stiamo considerando altro non è che la ricerca della primitiva della funzione $f(t)$, strettamente connesso con il problema del calcolo integrale. Il procedimento di soluzione è ben spiegato nei testi di analisi, e ci limitiamo a ricordarlo

---

[3] Giuseppe Lodovico Lagrangia (infrancesato in Joseph Louis Lagrange), nato a Torino, allora regno di Piemonte e Sardegna, 25 Gennaio 1736; morto a Parigi, 10 aprile 1813.

[4] Ricordiamo il teorema di Lagrange: *se la funzione $x(t)$ è continua sull'intervallo $[a, b]$ e differenziabile in $(a, b)$ allora esiste un punto $\xi \in (a, b)$ tale che $x(b) - x(a) = (b - a)\,\dot{x}(\xi)$.* Nel caso che stiamo considerando abbiamo $\dot{x}(t) = 0$ su tutto l'intervallo, e dunque deve essere $x(b) - x(a) = 0$.

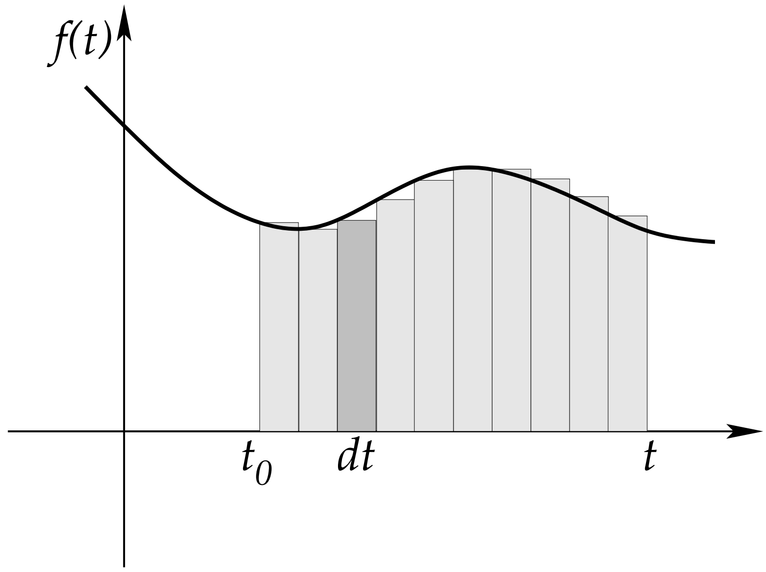


**Figura 2.2.** La soluzione dell'equazione $\dot{x} = f(t)$ si riconduce al calcolo dell'area compresa tra il grafico della funzione $f(t)$ e l'asse delle ascisse.

brevemente, illustrandolo con la figura 2.2. Scriviamo l'equazione nella forma

$$dx = f(t)dt \; ; \tag{2.2}$$

questo significa che mentre si incrementa la variabile indipendente da $t$ fino a $t + dt$ la variabile dipendente $x$ viene incrementata di $f(t)dt$, ossia dell'area del rettangolo di base $dt$ ed altezza $f(t)$. Fissiamo $t_0$ come istante iniziale ed il valore corrispondente $x(t_0) = x_0$. Se incrementiamo il tempo ad intervalli $d\tau$ fino a $t$ avremo un incremento totale di $x$ dato dalla somma di tutti gli incrementi in ciascun intervallino $d\tau$. In una formula[5]

$$\int_{x_0}^{x} d\xi = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau \; ,$$

ovvero

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau \; . \tag{2.3}$$

Questa formula esprime il

**Teorema fondamentale del calcolo:** *se $x(t)$ è una primitiva di $f(t)$ allora vale la relazione*

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau \; .$$

[5] Una piccola osservazione sulla notazione: la somma si estende fino a $x$ a sinistra e fino a $t$ a destra; corrispondentemente, gli indici di somma sono stati cambiati rispettivamente in $\xi$ ed in $\tau$.

In altre parole, l'incremento di $x$ sull'intervallo $[t_0, t]$ è pari all'area – in senso algebrico – compresa tra il grafico della funzione $f(t)$ e l'asse delle ascisse. Per la dimostrazione rimandiamo ai testi di Analisi Matematica.

Soffermiamoci ancora un istante sul problema delle condizioni iniziali, o di Cauchy. Le proprietà (i) e (ii) che abbiamo enunciato sopra asseriscono che se esiste una primitiva $x(t)$ della funzione $f(t)$ allora tutte le primitive hanno la forma $x(t) + c$. La domanda è: come si riconnette il problema del calcolo della primitiva, ed in particolare la proprietà enunciata, con il problema di Cauchy? La risposta è, tutto sommato, semplice, ed è nascosta nell'arbitrarietà della costante $c$. In effetti, possiamo guardare alla condizione iniziale $x(0) = x_0$ come ad una equazione per $c$. Precisamente, sia $x_1(t)$ una qualsiasi soluzione, che abbiamo determinato in qualche modo. Sommandole una costante arbitraria $c$ e sostituendola nella condizione iniziale otteniamo $x_1(t_0)+c = x_0$, e dunque[6] $c = x_0 - x_1(t_0)$. Questa procedura è seguita comunemente nei trattati di Analisi Matematica. Precisamente, si determina la *soluzione generale* dell'equazione differenziale in una forma che contenga un numero sufficiente di parametri arbitrari. Questi vengono determinati a loro volta tramite le condizioni iniziali.

La forma (2.3) della soluzione tiene già conto della condizione iniziale, e riconduce la soluzione del problema di Cauchy al calcolo di un integrale sull'intervallo $[t_0, t]$. Possiamo ben considerarla come la soluzione completa del problema. Da qui deduciamo anche che la soluzione è univocamente determinata dal dato iniziale $x_0$.

Nei trattati classici la formula (2.3) viene detta *soluzione per quadrature*. Si intende con questo che la soluzione è scritta in una forma che richiede solo *l'esecuzione di un numero finito di operazioni algebriche, inclusa eventualmente l'inversione di funzioni, ed il calcolo di un numero finito di integrali di funzioni note.*[7]

### 2.1.2 Sistemi autonomi

Consideriamo ora il caso di un sistema autonomo, ossia il sistema descritto dall'equazione

$$\dot{x} = f(x) \ , \tag{2.4}$$

nella quale il secondo membro non contiene esplicitamente il tempo, ma ne dipende implicitamente tramite la funzione incognita $x(t)$. Per fissare le idee, supporremo la funzione $f(x)$ continua su un intervallo $\mathscr{G} \subset \mathbb{R}$. Anche in questo caso non conosciamo la funzione, ma abbiamo informazioni sulla sua derivata. La figura 2.3 mostra che da un punto di vista geometrico non ci sono differenze sostanziali rispetto al caso trattato fin qui. Semplicemente, le rette tangenti alla soluzione sono parallele su ciascuna retta orizzontale, anziché verticale, il che si riconduce, in buona sostanza, ad uno scambio di ruoli tra $x$ e $t$. Anche qui, il problema è trovare una curva $x(t)$ tale che in ogni

[6] La frase può sembrare un po' fumosa, ma ha un significato preciso: se conosco la soluzione $x_1(t)$ so calcolare, in linea di principio, $x_1(t_0)$, che è un numero reale. Quindi so calcolare anche $x_0 - x_1(t_0)$, ossia la costante $c$.

[7] Il termine *quadratura* fa riferimento appunto al calcolo di un'area, svolto calcolando l'integrale.

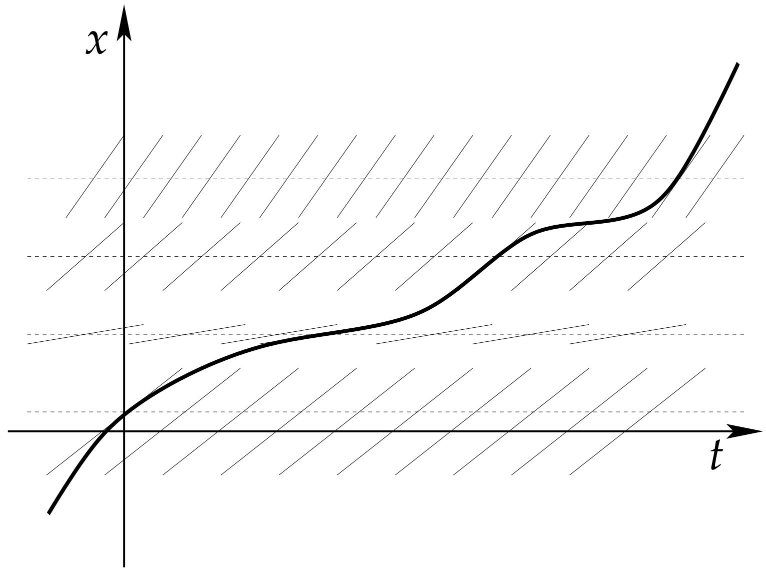


**Figura 2.3.** L'insieme delle rette tangenti per un'equazione della forma $\dot{x} = f(x)$, ed una possibile soluzione.

punto $\big(t, x(t)\big)$ la retta tangente alla curva sia proprio quella tracciata. Consideriamo anche in questo caso il problema di Cauchy, fissando la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$.

Cominciamo l'analisi con la seguente osservazione, semplice ma utile: la figura suggerisce che data una soluzione se ne possano costruire immediatamente infinite altre semplicemente traslando la curva in direzione orizzontale. L'operazione è illustrata in figura 2.4. Formalmente, se $x(t)$ è una soluzione, anche $x_1(t) = x(t-t')$ lo è, qualunque sia $t' \in \mathbb{R}$. Si dice che la soluzione $x_1(t)$ è ottenuta da $x(t)$ per *traslazione temporale*.

La verifica richiede un briciolo di attenzione, ma non è difficile. Affermare che $x(t)$ è soluzione significa dire che vale identicamente in $t$ l'eguaglianza $\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big)$. Per la funzione $x_1(t)$ vale $\dot{x}_1(t) = \dot{x}(t-t') = f\big(x(t-t')\big) = f\big(x_1(t)\big)$, e confrontando il primo e l'ultimo termine di questa catena di eguaglianze si conclude che $x_1(t)$ è una soluzione.

Il risultato appena provato è vero grazie all'ipotesi che il secondo membro dell'equazione differenziale sia indipendente dal tempo, ovvero che il sistema sia autonomo, ma è falso nel caso non autonomo. In conseguenza di tale proprietà dei sistemi autonomi semplificheremo senz'altro il problema ponendo $t_0 = 0$, e scrivendo la condizione iniziale come $x(0) = x_0$. In questo modo si ripartiscono le condizioni iniziali e quindi le soluzioni in famiglie parametrizzate dal *dato iniziale* $x_0$, e si sottintende che all'interno di ciascuna famiglia le diverse soluzioni differiscano per una traslazione temporale.

**Lemma 2.1:** *Sia $f(\overline{x}) = 0$. Allora la funzione $x(t) = \overline{x}$ è una soluzione soddisfacente la condizione iniziale $x(0) = \overline{x}$.*

In altri termini: i punti ove si annulla il secondo membro sono soluzioni (costanti) dell'equazione differenziale.

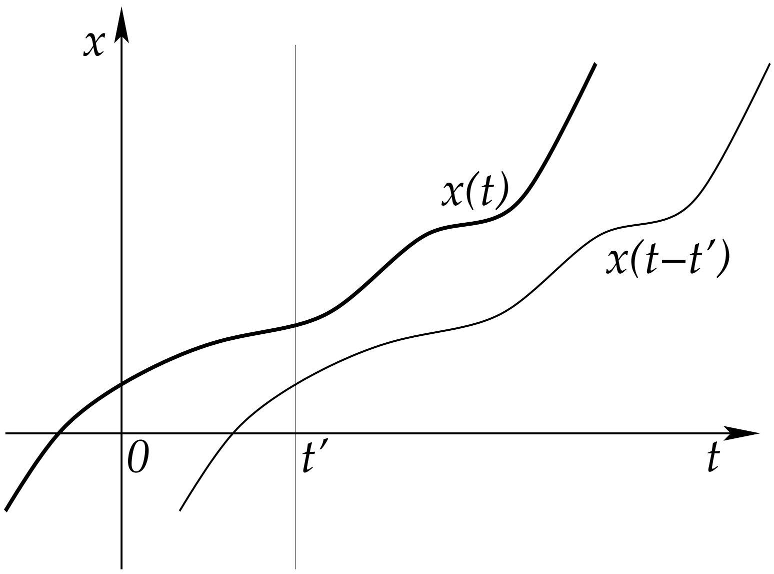


**Figura 2.4.** Traslazione temporale di una funzione. In ogni punto $t$ la funzione traslata $x(t-t')$ assume il valore della funzione $x(t)$ nel punto $t-t'$.

**Dimostrazione.** Che la funzione $x(t) = \overline{x}$ verifichi la condizione iniziale è fatto ovvio. Che sia soluzione lo si verifica immediatamente per sostituzione nell'equazione, tenendo conto che $\frac{d}{dt}\overline{x} = 0$. *Q.E.D.*

Ad un punto $\overline{x}$ ove $f(x)$ si annulla daremo il nome di *punto di equilibrio*; alla soluzione $x(t) = \overline{x}$ daremo il nome di *soluzione stazionaria*, o anche *soluzione di equilibrio*. Sottolineiamo fin d'ora che la ricerca di equilibri costituisce il punto di partenza per lo studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni differenziali. Grazie al lemma che abbiamo appena visto ci è facile dimostrare la

**Proposizione 2.2:** *L'equazione $\dot{x} = f(x)$ ammette una soluzione stazionaria $x(t) = \overline{x}$ se e solo se $\overline{x}$ è un punto di equilibrio.*

**Dimostrazione.** Che i punti di equilibrio siano soluzioni stazionarie è il contenuto del lemma 2.1. Viceversa, sia $x(t) = c$, con $c \in \mathbb{R}$, una soluzione stazionaria. Allora vale $\dot{x}(t) = 0$ per tutti i tempi $t$, e deve essere anche $f\bigl(x(t)\bigr) = f(c) = 0$. *Q.E.D.*

Consideriamo ora un punto $x_0$ che non sia un equilibrio, ossia $f(x_0) \neq 0$. Poiché abbiamo ammesso la continuità della funzione ne segue che esisterà un intorno $U$ di $x_0$ in cui $f(x)$ non si annulla e, di più, manterrà il suo segno, positivo o negativo. In questo intorno possiamo riscrivere l'equazione (2.4) come

$$\frac{dx}{f(x)} = dt \ . \tag{2.5}$$

L'equazione non è dissimile dalla (2.2) che abbiamo visto nel paragrafo 2.1.2. Se scegliamo un qualunque punto $x \in U$ ed integriamo ambo i membri tenendo conto

della condizione iniziale $x(0) = x_0$ otteniamo

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)} = \int_0^t d\tau = t \ . \tag{2.6}$$

Possiamo leggere questa formula come segue: il tempo necessario perché la soluzione partita da $x_0$ raggiunga il punto $x$ è dato dall'integrale del primo membro. Se vogliamo ricavare in modo esplicito la soluzione $x(t)$ occorre che la funzione sia invertibile. Ma questo è vero; infatti, per la permanenza del segno di $f$ nell'intorno di $x_0$, la funzione integrale a primo membro è funzione strettamente monotona dell'estremo libero di integrazione, e come tale invertibile. In conclusione, abbiamo dimostrato la seguente

**Proposizione 2.3:** *Sia $f(x)$ una funzione reale continua su un aperto $\mathscr{G}$ contenuto in $\mathbb{R}$; sia $x_0 \in \mathscr{G}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario. Allora esiste un intorno $U$ di $x_0$ ed un intorno $\mathscr{I}$ di $t_0$ in cui l'equazione $\dot{x} = f(x)$ ammette una soluzione soddisfacente la condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ .*

Si noti bene che non si afferma nulla sull'unicità della soluzione, né si garantisce che essa possa essere prolungata arbitrariamente nel tempo.

## 2.2 I problemi dell'unicità e della prolungabilità

Discutiamo i problemi dell'unicità e della prolungabilità servendoci di alcuni esempi facilmente trattabili con la teoria che abbiamo esposto fin qui. Nel frattempo illustreremo la condizione di Lipschitz,[8] che ha un ruolo di primo piano nella dimostrazione dell'unicità della soluzione.

### 2.2.1 L'equazione lineare

Iniziamo con la semplice equazione

$$\dot{x} = \lambda x \tag{2.7}$$

ed applichiamo la teoria che abbiamo appena sviluppato.

Per $\lambda = 0$ l'equazione si riduce al caso banale $\dot{x} = 0$. Ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un equilibrio, e quindi si hanno solo soluzioni stazionarie $x(t) = x_0$.

Veniamo dunque al caso più interessante $\lambda \neq 0$. Esiste sempre un'unica soluzione di equilibrio $x(t) = 0$, che corrisponderà ad un dato iniziale nullo. Escludendo pertanto il caso $x_0 = 0$ calcoliamo la soluzione mediante la formula di quadratura (2.6), ossia

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi} = \lambda t \ .$$

Otteniamo $\ln|x| - \ln|x_0| = \lambda t$, dove occorre ricordare che $x_0$ e $x$ devono avere lo stesso segno. Calcolando l'esponenziale di ambo i membri otteniamo infine

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} \ .$$

[8] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, nato a Königsberg (allora Germania; oggi Kaliningrad, in Russia), 14 maggio 1832; morto a Bonn, 7 ottobre 1903.

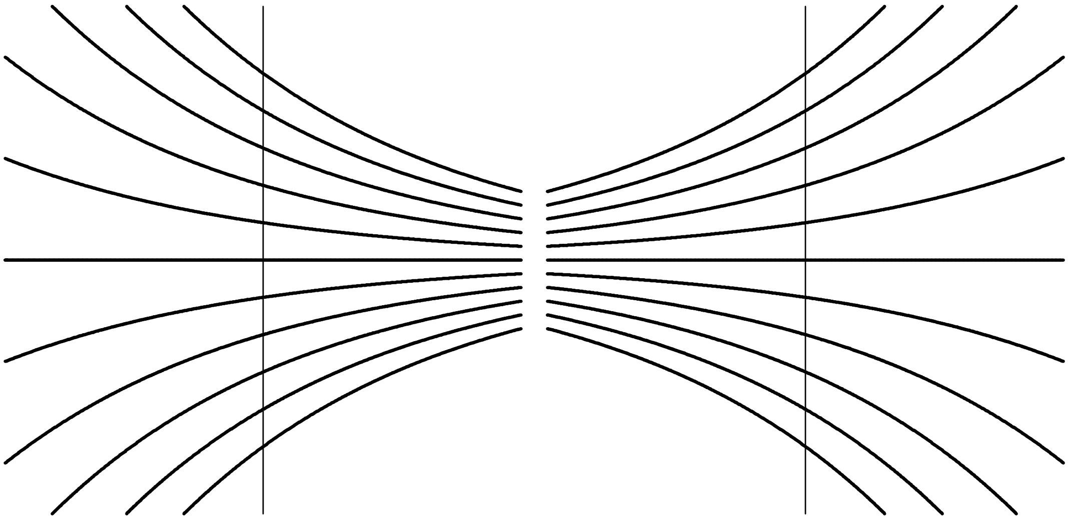

**Figura 2.5.** Le soluzioni dell'equazione $\dot{x} = \lambda x$. A sinistra il caso $\lambda < 0$, a destra il caso $\lambda > 0$.

La forma stessa della soluzione ne garantisce l'unicità, dal momento che la funzione esponenziale non si annulla per nessun valore reale. Le soluzioni sono rappresentate in figura 2.5. Osserviamo che per $x_0 = 0$ si ritrova la soluzione stazionaria.

### 2.2.2 *Un esempio di non unicità della soluzione*

Come secondo esempio consideriamo l'equazione

$$\dot{x} = x^{2/3} \ . \tag{2.8}$$

La funzione $f(x) = x^{2/3}$ al secondo membro è continua su tutto l'asse reale e si annulla nel punto di equilibrio $x = 0$. Si ha dunque la soluzione stazionaria $x(t) = 0$. Si osserva però che $x = 0$ è un punto di non differenziabilità della funzione, perché ivi la sua derivata $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ diventa infinita.

Supponiamo dunque $x_0 \neq 0$, e costruiamo la soluzione con dato iniziale $x(0) = x_0$. Facendo ancora uso della formula di quadratura (2.6) otteniamo

$$\int_{x_0}^{x} \xi^{-2/3}\, d\xi = 3(x^{1/3} - x_0^{1/3}) = t \ .$$

Risolvendo questa equazione rispetto ad $x$ si ottiene la soluzione

$$x(t) = \left(x_0^{1/3} + \frac{t}{3}\right)^3 \ . \tag{2.9}$$

La famiglia di soluzioni al variare del dato iniziale $x_0$ è rappresentata in figura 2.6. Si osserva subito che *tutte* queste soluzioni attraversano l'asse delle ascisse, il che significa che intersecano la soluzione stazionaria $x(t) = 0$. In effetti, sostituendo $x_0 = 0$ nella (2.9) si ottiene la soluzione $x(t) = t^3/27$, che al pari della soluzione stazionaria soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 0$. Cade dunque l'unicità della soluzione.

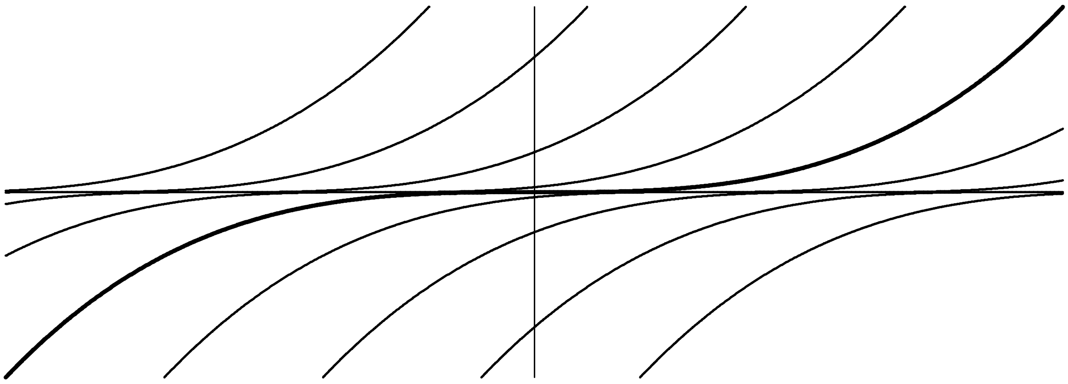

**Figura 2.6.** Le soluzioni dell'equazione $\dot{x} = x^{2/3}$. La soluzione stazionaria non è unica. Una soluzione con dato iniziale $x_0 < 0$ cade in un tempo finito sulla soluzione stazionaria, e da qui può staccarsi ad un tempo arbitrario (si veda il testo).

È interessante descrivere l'evoluzione temporale di un sistema che obbedisca a questa equazione. Consideriamo un dato iniziale $x(0) = 0$. Il sistema può restare nello stato stazionario per tutti tempi positivi, oppure, ad un istante $t_1 \geq 0$ arbitrario, sfuggire dall'equilibrio lungo una parabola cubica $x(t) = (t - t_1)^3/27$. Se ciò avviene, l'evoluzione successiva è determinata in modo univoco. Sia invece $x_0 < 0$. Allora l'evoluzione resta determinata in modo univoco fino al tempo $t_2 = -3x_0^{1/3} > 0$, quando la soluzione cade sul punto di equilibrio. Poi tutto prosegue come per il dato iniziale di equilibrio: in un qualunque istante $t_3 \geq t_2$ la soluzione può staccarsi dall'equilibrio per seguire la parabola cubica $x(t) = (t - t_3)^3/27$. L'evoluzione nel futuro è determinata in modo univoco solo per i dati iniziali $x_0 > 0$. Ma in questo caso è il passato che non è univoco per i tempi precedenti l'istante $t_4 = -3x_0^{1/3} < 0$, quando la soluzione si è staccata dell'equilibrio.

### *2.2.3 La condizione di Lipschitz*

Alla luce dell'ultimo esempio si può essere tentati di concludere che la non differenziabilità del secondo membro sia sufficiente a far cadere l'unicità della soluzione. Il prossimo esempio mostra che la situazione è più complessa.

Consideriamo l'equazione

$$\dot{x} = |x| \ . \tag{2.10}$$

Anche qui la funzione al secondo membro è non differenziabile per $x = 0$, ed ammette la soluzione stazionaria $x(t) = 0$. Ricorrendo ancora una volta alla formula di quadratura (2.6) si trova che le soluzioni per $x_0 \neq 0$ sono

$$x(t) = \begin{cases} x_0 e^{-t} & \text{per } x_0 < 0 \ , \\ x_0 e^{t} & \text{per } x_0 > 0 \ . \end{cases}$$

Si vede dunque che in questo caso l'unicità della soluzione del problema di Cauchy è assicurata. L'andamento delle soluzioni è rappresentato in figura 2.7.

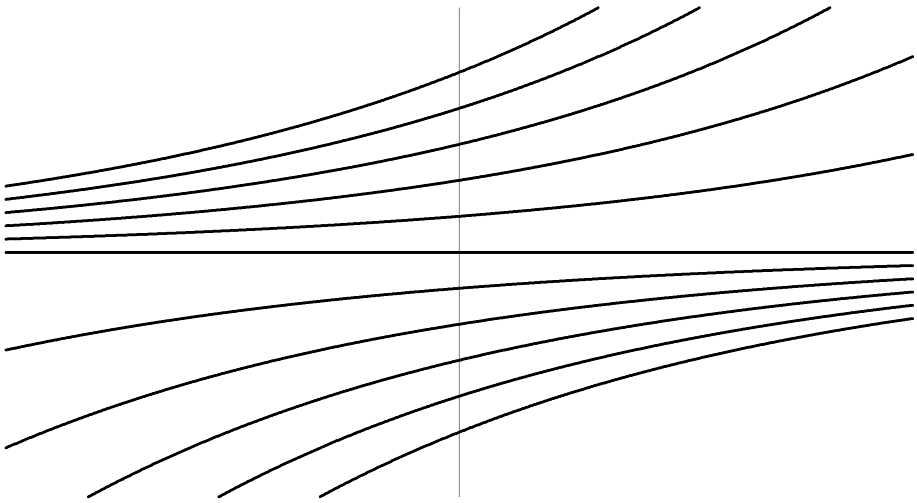

**Figura 2.7.** Le soluzioni dell'equazione $\dot{x} = |x|$.

Cosa distingue i due esempi precedenti? Entrambi hanno secondi membri continui, e per entrambi non esiste la derivata del secondo membro nell'origine. Tuttavia, insistendo nel ricercare condizioni di regolarità del secondo membro che possano garantire l'unicità della soluzione dell'equazione differenziale, possiamo osservare che la perdita di regolarità si verifica in modo ben diverso nei due casi esaminati. Nel primo caso la derivata non esiste perché il rapporto incrementale diverge, mentre nel secondo caso il rapporto incrementale ha limiti destro e sinistro distinti, ma si mantiene limitato. La chiave del problema dell'unicità è proprio questa: un problema di Cauchy ha soluzione unica nell'intorno di un certo istante iniziale, se nell'intorno del corrispondente valore iniziale il secondo membro dell'equazione ha rapporto incrementale limitato. In altre parole deve valere che *l'incremento di $f$ in modulo sia controllato dall'incremento di $x$:*

$$\big|f(x_2) - f(x_1)\big| \le K|x_2 - x_1| \ , \tag{2.11}$$

*questo per una opportuna costante positiva $K$ e per ogni $x_1, x_2$ in un intorno di $x_0$.*

La condizione (2.11) viene detta *di Lipschitz*, e le funzioni $f$ che la soddisfano nell'intorno di ogni punto del loro insieme di definizione, eventualmente con costanti differenti, vengono dette *localmente lipschitziane*. La funzione si dice invece *lipschitziana* se la condizione di Lipschitz è soddisfatta (con una stessa costante) in tutto il suo insieme di definizione.

Vedremo più avanti che la condizione di Lipschitz, eventualmente adattata in modo opportuno al caso non autonomo[9] sarà un ingrediente fondamentale nel teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy. Anzi, anticipiamo sin d'ora che, mentre la continuità di $f$ garantisce la sola esistenza locale della soluzione, la condizione di Lipschitz ne garantisce l'unicità.

[9] Nel caso non autonomo è sufficiente richiedere che la condizione di Lipschitz per $f(t, x)$ sia uniforme in $t$, ossia che valga la diseguaglianza (2.11) con $K$ indipendente da $t$

**Esercizio 2.1:** Provare che se $f$ è di classe $C^1$ su un aperto $\mathscr{G}$ di $\mathbb{R}^n$, ovvero è continua ed ammette tutte le derivate parziali continue, essa è anche localmente lipschitziana in $\mathscr{G}$. (Suggerimento: usare il teorema del valor medio di Lagrange).

### *2.2.4 Un esempio di non prolungabilità per tutti i tempi*

Come ultimo esempio consideriamo l'equazione

$$\dot{x} = x^2 \ . \tag{2.12}$$

La formula di quadratura (2.6) dà la soluzione

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t} \ ,$$

che include come caso particolare anche la soluzione stazionaria $x(t) = 0$ ottenuta sostituendo il dato iniziale $x_0 = 0$. Per fissato $x_0$ la soluzione è evidentemente unica, ma si osserva subito che essa tende all'infinito nel punto $t = \frac{1}{x_0}$. In particolare se il dato iniziale è assegnato ad un tempo iniziale $t_0 < \frac{1}{x_0}$ la soluzione diverge in un tempo finito (pari a $t = \frac{1}{x_0} - t_0$) *nel futuro*; mentre se il tempo iniziale è $t_0 > \frac{1}{x_0}$, la soluzione diverge in un tempo finito *nel passato*. Cade dunque, in questo caso, la prolungabilità delle soluzioni per tutti i valori reali di $t$: la crescita troppo rapida del secondo membro, valutato sulla soluzione, provoca un comportamento di tipo esplosivo dell'evoluzione.

I comportamenti studiati attraverso questi ultimi esempi sono particolarmente significativi, sia concettualmente che tecnicamente. La non unicità, in particolare, configge con il paradigma deterministico dal quale siamo partiti, ed al quale per il momento vogliamo rimanere legati nella descrizione dell'evoluzione dei fenomeni. Essa corrisponde alla circostanza che lo stato presente *non* determina il passato o il futuro: evoluzioni distinte, e persino infinite evoluzioni, sono possibili anche a partire da modelli semplici come quello cubico che abbiamo analizzato. La questione della prolungabilità per tutti i tempi della soluzione, che corrisponde al fatto che il sistema "vive" per un tempo limitato, o da un tempo limitato, è soprattutto (ma non sempre) un aspetto tecnico, che spesso può essere rimandato ad una migliore definizione del modello in esame. Su entrambe le questioni torneremo in seguito.

## 2.3 Sistemi non autonomi

Veniamo ora a considerare qualche caso che rientri nella classe dei sistemi *non autonomi*, descritti cioè da equazioni della forma

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{2.13}$$

Assumeremo anche qui che la funzione $f(x,t)$ sia almeno continua in un aperto $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ del piano $(t, x)$. Si osservi bene che in questo caso non sarà possibile, data una soluzione, ricavarne altre per traslazione: dovremo dunque esaminare in dettaglio il problema di Cauchy considerando condizioni iniziali della forma generale $x(t_0) = x_0$, con $(t_0, x_0) \in \mathscr{D}$.

### *2.3.1 Equazioni lineari*

Una classe interessante è costituita dalle equazioni lineari. Si tratta in pratica delle equazioni in cui la variabile $x$ compare solo come monomio di primo grado. In altre parole, avremo $f(x,t) = \lambda(t)x + b(t)$, con due funzioni note $\lambda(t)$ e $b(t)$.

Il più semplice esempio di equazione differenziale lineare è $\dot{x} = \lambda x$, in cui $\lambda$ è costante. Ne abbiamo già discusso, e quindi passeremo senz'altro a considerarne un paio di varianti che ricadono nel caso non autonomo.

Supponiamo anzitutto che il parametro $\lambda$ dipenda dal tempo $t$. Avremo dunque l'equazione, detta *lineare omogenea*,

$$\dot{x} = \lambda(t)x \ . \tag{2.14}$$

Vediamo subito che $x(t) = 0$ è una soluzione stazionaria: per verificarlo basta sostituirla nell'equazione. Considerando il dato iniziale $x_0 \neq 0$ si può riscrivere l'equazione nella forma

$$\frac{dx}{x} = \lambda(t)dt \ .$$

Integrando ambo i membri, e tenendo anche conto della condizione iniziale $x(t_0) = x_0$, ricaviamo

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi} = \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau \ . \tag{2.15}$$

Ancora una volta, dunque, abbiamo scritto una soluzione per quadrature. In effetti, il primo termine si integra direttamente – è ciò che abbiamo già fatto:

$$\ln|x| - \ln|x_0| = \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau \ ;$$

anche qui dobbiamo ricordare che $x$ ed $x_0$ devono avere lo stesso segno. Risolvendo rispetto ad $x$ abbiamo

$$x(t) = x_0 \exp\left( \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau \right) \ ; \tag{2.16}$$

Il calcolo esplicito della soluzione richiede una seconda quadratura.

Veniamo ora all'equazione

$$\dot{x} = \lambda(t)x + b(t) \ , \tag{2.17}$$

detta *lineare non omogenea* perché vi compare un termine indipendente da $x$. Rimuovendo il termine $b(t)$ si ottiene l'equazione detta *omogenea associata*, che abbiamo già discusso. La soluzione generale dell'equazione completa si ottiene cercandone una qualunque soluzione particolare, e sommandole la soluzione generale dell'omogenea associata.[10] Vediamo dunque come trovare una soluzione particolare: discuteremo due schemi diversi.

---

[10] Questa è una nota proprietà generale delle equazioni lineari, che il lettore dovrebbe già conoscere almeno nell'ambito delle equazioni algebriche su spazi vettoriali di dimensione

*(i) Il metodo della variazione delle costanti, dovuto a Lagrange.* Nella soluzione (2.16) dell'equazione omogenea associata alla (2.17) compare la costante $x_0$ – di fatto il dato iniziale. Si congettura che la soluzione dell'equazione completa possa ritrovarsi semplicemente ammettendo che la costante $x_0$ debba essere sostituita da una funzione di $t$. In altre parole, si cerca una soluzione della forma

$$x(t) = u(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau\right) , \tag{2.18}$$

dove $u(t)$ è una funzione da determinarsi. Occorre dunque ricavare un'equazione per $u(t)$, e per questo si sostituisce la forma cercata della soluzione direttamente nell'equazione. Si calcola[11]

$$\dot{x}(t) = \bigl[\dot{u}(t) + u(t)\lambda(t)\bigr] \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau\right)$$

e si sostituiscono questa espressione e la (2.18) nell'equazione (2.17), ottenendo

$$\bigl[\dot{u}(t) + u(t)\lambda(t)\bigr] \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau\right) = u(t)\lambda(t) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau\right) + b(t) \ .$$

Dunque, la (2.18) è soluzione a condizione che $u(t)$ soddisfi l'equazione differenziale

$$\dot{u} = b(t) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau\right) \ .$$

Il membro di destra ha un aspetto un po' complicato, ma si tratta pur sempre di una funzione nota della sola variabile $t$, ove si supponga di aver calcolato l'integrale. Abbiamo dunque un'equazione della forma discussa nel paragrafo 2.1.1, di cui sappiamo

---

finita. Nel caso che stiamo trattando si può ragionare come segue. Si riscrive l'equazione nella forma $Dx = b(t)$, dove $D = \bigl(\frac{d}{dt} - \lambda(t)\bigr)$ è un operatore che agisce sullo spazio delle funzioni $x(t)$ differenziabili. Si verifica che si tratta di un operatore lineare (farlo per esercizio). In quanto operatore lineare, $D$ ammette un nucleo formato dalle funzioni che soddisfano $Dx = 0$, e questa è l'equazione omogenea. La soluzione dell'equazione completa può dunque contenere un termine additivo arbitrario che appartenga al nucleo di $D$.

[11] Si ricordi che $\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau = \lambda(t)$.

calcolare la soluzione grazie alla formula di quadratura (2.3). La soluzione si scrive[12]

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} b(\tau) \exp\left( - \int_{t_0}^{\tau} \lambda(s)\, ds \right) d\tau \tag{2.19}$$

Il calcolo di $u(t)$ richiede una seconda quadratura. Inserendo la funzione $u(t)$ così calcolata nella (2.18) si trova la soluzione cercata.

Potremmo ora scrivere la soluzione generale dell'equazione (2.17) sommando alla soluzione trovata la soluzione generale dell'equazione omogenea. Se però il nostro fine è risolvere il problema di Cauchy con una condizione iniziale $x(t_0) = x_0$ non ne abbiamo bisogno: di questo si è già tenuto conto nel procedimento stesso, fissando gli estremi di integrazione.

*(ii) Il metodo del fattore integrante.* Riscriviamo l'equazione (2.17) moltiplicandone ambo i membri per una funzione incognita $\varphi(t)$, che supporremo non nulla, ed abbiamo

$$\varphi(t)[\dot{x} - \lambda(t)x] = b(t)\varphi(t)\ , \tag{2.20}$$

equivalente alla precedente. Cerchiamo ora di determinare l'incognita $\varphi(t)$ in modo che il membro di sinistra risulti essere la derivata rispetto al tempo di una funzione che siamo in grado di determinare, e che indicheremo con $F(x,t)$. Se ciò fosse possibile, potremmo anche riscrivere l'equazione come $\frac{dF}{dt} = b(t)\varphi(t)$, dove il termine di destra sarebbe una funzione nota del tempo, e dunque la soluzione sarebbe ricondotta ad una quadratura. Questo giustifica il nome *fattore integrante* dato alla funzione $\varphi(t)$. Vediamo dunque come si possa determinare $F(x,t)$. Confrontando l'espressione $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t}$ col membro di sinistra dell'equazione (2.20) vediamo subito che $F(x,t)$ dovrà essere lineare in $x$, ovvero $F(x,t) = \varphi(t)x$, e che $\varphi(t)$ dovrà soddisfare l'equazione lineare omogenea $\dot{\varphi} = -\lambda(t)\varphi$. Di questa conosciamo già la soluzione $\varphi(t) = \exp\bigl(-\int_{t_0}^{t} \lambda(s) ds\bigr)$, e non ci resta che sostituirla nella (2.20) ed eseguire una seconda quadratura per ritrovare la soluzione ottenuta col metodo di variazione delle costanti.

### *2.3.2 Le equazioni di Bernoulli*

Le equazioni lineari sono semplici da risolvere, ed il loro interesse risiede in buona parte nel fatto che esse forniscono, come vedremo, il comportamento qualitativo di soluzioni di equazioni non lineari almeno in prossimità delle soluzioni di equilibrio.

C'è una motivazione ulteriore: alcune equazioni *non* lineari, si possono ridurre alla forma lineare mediante una trasformazione *non* lineare dell'incognita. Appartengono

---

[12] Occorre un po' di attenzione. Sotto il segno di integrale della formula (2.3) deve comparire una funzione dell'indice di somma $\tau$; dunque nell'integrale che compare in $\exp\left( - \int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau \right)$ occorre cambiare l'estremo superiore di integrazione in $\tau$, in modo che il risultato sia una funzione di $\tau$, e non di $t$. Per consistenza, in quest'ultimo integrale si cambierà il nome dell'indice di somma; qui abbiamo usato $s$. La funzione di $\tau$ che risulta dal calcolo dell'integrale e dell'esponenziale dovrà essere moltiplicata per la funzione $b(\tau)$ e nuovamente integrata.

a questa classe le cosiddette equazioni di Bernoulli.[13] Sono queste le equazioni della forma

$$\dot{x} = \lambda(t)x + \mu(t)x^\alpha \ ,$$

dove i coefficienti $\lambda$ e $\mu$ sono funzioni continue del tempo almeno in uno stesso intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$, e $\alpha$ è un numero reale.[5] Se vogliamo trovare una giustificazione, possiamo figurarci un sistema concreto descritto da equazioni di questo tipo se immaginiamo una generalizzazione della crescita logistica per una popolazione nella quale la competizione sociale dovuta alla sovrappopolazione sia data da una legge potenza con esponente $\alpha$ generico, e con un coefficiente e tassi di natalità e mortalità che dipendano dal tempo in modo noto.[14]

Veniamo ora al procedimento di risoluzione, dovuto a Leibniz.[36] Osserviamo preliminarmente che se $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 1$ l'equazione è lineare; escludiamo quindi questi casi. Eseguiamo il cambiamento di funzione incognita

$$u = x^{1-\alpha} \ ;$$

da questo, derivando, si ottiene $\dot{u} = (1-\alpha)x^{-\alpha}\dot{x}$, e sostituendo nell'equazione per $x(t)$ si ricava l'equazione corrispondente per $u(t)$

$$\dot{u} = (\alpha - 1)\lambda(t)u + (\alpha - 1)\mu(t) \ .$$

Questa è una equazione lineare, che possiamo ben risolvere coi metodi che ormai conosciamo. Potremo poi tornare alla variabile precedente $x(t)$ mediante la trasformazione inversa

$$x(t) = [u(t)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \ .$$

L'esistenza almeno locale della soluzione è garantita dalla regolarità del secondo membro.

**Esercizio 2.2:** Verificare che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(t,x) = \lambda(t)x + \mu(t)x^\alpha$ è localmente lipschitziana in $I \times \mathbb{R}_+ \cup I \times \mathbb{R}_-$, dove $I$ è l'intervallo di continuità dei coefficienti. Per $\alpha \geq 0$ la funzione $f$ è localmente lipschitziana in tutto $I \times \mathbb{R}$.

Resta da discutere se la soluzione sia unica, e se sia anche prolungabile indefinitamente nel tempo. Dal momento che la soluzione dell'equazione di Bernoulli è stata ricondotta a quella di un'equazione lineare, sembra spontaneo concludere che debbano valere ambedue queste proprietà. In effetti, ciò è vero per le soluzioni dell'equazione lineare: questo segue esaminando il procedimento di costruzione delle soluzioni, o più semplicemente la formula finale che le esprime. Il problema è nel legame tra la nuova variabile introdotta per risolvere l'equazione e la variabile originaria nell'equazione di Bernoulli: si tratta infatti di una relazione non lineare, che può ben introdurre delle singolarità. Discutiamo in dettaglio questi due punti, prima con considerazioni di carattere generale, e poi con due esempi.

[13] Jakob Bernoulli, nato a Basilea, 27 dicembre 1654; morto a Basilea, 16 agosto 1705.

[14] Si pensi ad esempio ad popolazione animale nelle condizioni di regolazione create artificialmente in un allevamento. Si ricordi però che l'equazione fu concepita da Bernoulli come pure problema matematico, senza fare riferimento ad alcun modello specifico.

La prima considerazione riguarda la perdita di unicità. Se $\alpha \geq 0$ la funzione identicamente nulla è soluzione dell'equazione, corrispondente al dato iniziale $x_0 = 0$. L'unicità della soluzione stazionaria implicherebbe alcune conseguenze: per $\alpha$ reale generico le altre soluzioni sarebbero sempre positive;[15] per $\alpha$ razionale con denominatore dispari (ed in particolare per $\alpha$ intero) le altre soluzioni potrebbero essere positive o negative a seconda del segno del dato iniziale, ma non potrebbero cambiare segno. L'unicità della soluzione stazionaria non è però garantita: in generale essa viene a mancare per il dato iniziale se $0 < \alpha < 1$.

La seconda considerazione riguarda la prolungabilità della soluzione. È sufficiente prendere $\alpha > 1$, cosicché $\frac{1}{1-\alpha} < 0$ e la soluzione $x(t)$ *può* divergere a seconda dei dati iniziali $(t_0, x_0)$ scelti. Questo comporta la presenza, fra le soluzioni delle equazioni di Bernoulli, di caratteristiche *singolarità mobili* (cioè dipendenti solo dai dati iniziali e non dai coefficienti dell'equazione) che si manifestano come asintoti verticali nel grafico delle soluzioni. In altre parole, la soluzione non esiste per tutti i tempi, ma ha un tempo di vita limitato nel passato o nel futuro.

Come primo esempio consideriamo il problema di Cauchy

$$\dot{x} = x - tx^{\frac{1}{3}} \ , \quad x(t_0) = x_0 \ ,$$

sicché $\alpha = 1/3$. La funzione $f(t, x) = x - tx^{\frac{1}{3}}$ è regolare in tutto il piano privato della retta $x = 0$, e in particolare essa è localmente di classe Lipschitz. Pertanto la soluzione locale del problema di Cauchy proposto esiste ed è unica a condizione che il valore iniziale $x_0$ non sia nullo. La soluzione si determina esplicitamente attraverso la trasformazione $u(t) = [x(t)]^{\frac{2}{3}}$. L'equazione lineare per $u$ diventa $\dot{u} = \frac{2}{3}u - \frac{2}{3}t$, ed ammette la soluzione generale

$$u(t) = \tfrac{3}{2} + Ce^{\frac{2}{3}t} + t \ ,$$

con $C$ costante arbitraria reale. Ne segue che

$$x(t) = [u(t)]^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\tfrac{3}{2} + Ce^{\frac{2}{3}t} + t\right)^3} \ .$$

dove la costante arbitraria è data in termini dei dati iniziali da

$$C = \left(x_0^{\frac{2}{3}} - \tfrac{3}{2} - t_0\right)e^{-\frac{2}{3}t_0} \ .$$

Ora, la funzione identicamente nulla, $x(t) = 0$ è soluzione dell'equazione corrispondente al dato iniziale $x_0 = 0$. D'altra parte si ottiene un'altra soluzione definendo

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < t_0 \ , \\ \sqrt{\left[\tfrac{3}{2} + t - \left(\tfrac{3}{2} + t_0\right)e^{\frac{2}{3}t}\right]^3} & \text{per } t \geq t_0 \ . \end{cases}$$

Per $t \geq t_0$ tale funzione coincide con la soluzione generale nella quale si è posto $x_0 = 0$, e si raccorda in modo regolare in $t = t_0$ con la funzione nulla, sicché risulta essere di classe $C^1(\mathbb{R})$. Viene dunque a cadere l'unicità della soluzione in corrispondenza ai dati

[15] Si ricordi che le potenze reali sono definite solo per argomenti *positivi*.

con valore iniziale nullo, ovvero dove viene a mancare la proprietà di Lipschitz per il secondo membro dell'equazione.

Come esempio di non prolungabilità studiamo il problema di Cauchy

$$\dot{x} = -tx + t^3 x^3 \ , \quad x(t_0) = x_0 \ .$$

In questo caso $\alpha = 3$ e la trasformazione $u(t) = [x(t)]^{-2}$ riporta l'equazione alla forma lineare $\dot{u} = 2tu - 2t^3$, la cui soluzione generale è data da $u(t) = Ce^{t^2} + t^2 + 1$. Otteniamo dunque

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{Ce^{t^2} + t^2 + 1}} \ ,$$

dove $C$ è una costante dipendente dai dati iniziali. Imponendoli si trova

$$C = \left( \frac{1}{{x_0}^2} - {t_0}^2 - 1 \right) e^{-{t_0}^2} \ .$$

Ora, con uno studio grafico del segno della funzione $h(t) = Ce^{t^2} + t^2 + 1$ si riconosce che la soluzione $x(t)$ è definita per tutti i tempi per $C \geq 0$ e $C < -1$, mentre ha un intervallo limitato di esistenza per $-1 < C < 0$. Questa seconda possibilità si realizza effettivamente in corrispondenza ad opportune scelte del dato iniziale; ad esempio, se si sceglie $x_0 = \frac{1}{t_0}$, si ha $C = -e^{-{t_0}^2} \in (-1, 0)$.

**Esercizio 2.3:** Si studi il problema di Cauchy

$$\dot{x} = tx^2 - 2tx \ , \quad x(t_0) = x_0 \ .$$

*2.3.3 Le equazioni a variabili separabili*

Abbiamo utilizzato spesso, nelle pagine precedenti, il metodo di separazione delle variabili. Vediamolo ora nel caso generale. Si dicono *a variabili separabili* le equazioni della forma

$$\dot{x} = f(x) g(t) \ . \tag{2.21}$$

Anche per esse è possibile cercare punti di equilibrio risolvendo l'equazione $f(\overline{x}) = 0$. Se un tale punto esiste, allora $x(t) = \overline{x}$ è una soluzione stazionaria.

Supponiamo ora che sia $f(x_0) \neq 0$, e imponiamo ancora una volta il dato iniziale $x(t_0) = x_0$. Ricorrendo al procedimento della separazione delle variabili, scriviamo l'equazione sotto la forma

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t)\, dt \ ,$$

e integrando ambo i membri otteniamo una soluzione per quadrature

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{f(\xi)} = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\, d\tau \ .$$

Anche in questo caso è possibile in linea di principio ottenere la soluzione localmente nell'intorno di $t_0$ tramite un'inversione della funzione integrale a primo membro, lecita grazie al segno costante della funzione integranda; ma si tratta in generale di una

inversione locale, e inoltre solo in casi eccezionali è possibile eseguirla esplicitamente, dato che la classe di primitive note è molto esigua.

Il metodo di soluzione delle equazioni a variabili separabili è dovuto a Leibniz. Egli amava, come molti, giocherellare con il proprio orologio da taschino, che faceva scivolare sulla scrivania trascinandolo per un estremo della catenella. Qual è la traiettoria dell'orologio, se fisso la traiettoria dell'anellino all'estremità della catenella? Questo problema conduce in generale ad una equazione a variabili separabili. Proviamo a risolverlo nel caso semplice in cui l'anellino si muova lungo una retta, diciamo l'asse $y$ del piano cartesiano, e la catenella sia lunga $a$. Sia $(x, y)$ la posizione (del centro) dell'orologio. Allora la richiesta è che la tangente alla curva tracciata dall'orologio sia sempre diretta come la congiungente l'orologio con l'anellino che si muove sull'asse $y$. Questa condizione si traduce (esercizio!) nell'equazione differenziale a variabili separabili

$$y'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \ ,$$

la cui soluzione fornisce la traiettoria dell'orologio di Leibniz, e di altri analoghi problemi di trascinamento. La determinazione della forma esplicita della curva descritta dalla soluzione, detta espressivamente trattrice, è lasciata al lettore.

**Esercizio 2.4:** Studiare le soluzione del seguente problema di Cauchy al variare del dato iniziale $x_0$

$$\dot{x} = \sqrt{1 - x^2} \ , \quad x(0) = x_0 \ .$$

Prestare particolare attenzione ai casi $x_0 = 1$, $x_0 = -1$.

## 2.4 Soluzione per serie

L'utilità degli sviluppi in serie non si rivela solo nella costruzione di algoritmi di integrazione numerica. Si tratta in effetti di una tecnica usata da Cauchy per dimostrare il teorema locale di esistenza ed unicità per le soluzioni delle equazioni differenziali, sotto ipotesi di analiticità della funzione $f(x, t)$.

### *2.4.1 Il metodo del confronto di coefficienti*

Si tratta di un metodo proposto da Newton. Lo esponiamo qui riferendoci, per semplicità, al caso di un'equazione della forma

$$\dot{x} = f(x) \ , \tag{2.22}$$

con secondo membro indipendente dal tempo.[16]

[16] Tale scelta può apparire discutibile, tenuto conto che in questo caso conosciamo già la formula di quadratura. Ma il metodo che esporremo si estende senza difficoltà al caso di sistemi non autonomi o di sistemi di più equazioni. La scelta di considerare il caso di un sistema autonomo in dimensione uno è dettata solo da motivi di semplicità.

In questo paragrafo ci limiteremo a considerare l'aspetto formale. In altre parole, faremo uso di sviluppi in serie senza occuparci dei problemi di convergenza, trattando le espressioni che scriveremo come se fossero polinomi.

Consideriamo dunque lo sviluppo in serie di una funzione nell'intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, ossia

$$f(x) = \varphi_0 + \varphi_1(x - x_0) + \varphi_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{k \geq 0} \varphi_k (x - x_0)^k \ , \tag{2.23}$$

dove i coefficienti $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varphi_2, \ldots$ sono da considerarsi noti. Assumeremo che sia $\varphi_0 \neq 0$. In caso contrario infatti $x_0$ sarebbe un punto di equilibrio, e quindi avremmo una soluzione stazionaria.

Imponiamo la condizione iniziale $x(0) = x_0$, e cerchiamo una soluzione sviluppata in serie del tempo, ossia

$$x(t) = x_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots = x_0 + \sum_{k>0} \alpha_k t^k \ , \tag{2.24}$$

dove i coefficienti $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\ldots$ sono delle incognite da determinarsi in modo che $x(t)$ sia una soluzione dell'equazione (2.22). A tal fine dovremo sostituire lo sviluppo di $x(t) - x_0$ e la sua derivata $\dot{x}(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + \ldots$ nell'equazione, calcolando tutte le potenze di $x - x_0$. Scriviamo esplicitamente tutti i termini fino alla potenza $t^4$:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + 4\alpha_4 t^3 + 5\alpha_5 t^4 + \ldots = \\
\varphi_0 + \varphi_1\bigl(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \ldots\bigr) \\
+ \varphi_2\bigl(\alpha_1^2 t^2 + 2\alpha_1\alpha_2 t^3 + (2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2) t^4 + \ldots\bigr) \\
+ \varphi_3\bigl(\alpha_1^3 t^3 + 3\alpha_1^2\alpha_2 t^4 + \ldots\bigr) \\
+ \varphi_4\bigl(\alpha_1^4 t^4 + \ldots\bigr)
\end{aligned}$$

Procediamo ora per confronto di coefficienti, ossia eguagliando i coefficienti delle stesse potenze di $t$; otteniamo così il sistema ricorrente di equazioni

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \varphi_0 \\
2\alpha_2 &= \alpha_1\varphi_1 \\
3\alpha_3 &= \alpha_2\varphi_1 + \alpha_1^2\varphi_2 \\
4\alpha_4 &= \alpha_3\varphi_1 + 2\alpha_1\alpha_2\varphi_2 + \alpha_1^3\varphi_3 \\
5\alpha_5 &= \alpha_4\varphi_1 + (2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2)\varphi_2 + 3\alpha_1^2\alpha_2\varphi_3 + \alpha_1^4\varphi_4 \\
\cdots \quad & \cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Basta un po' di riflessione per rendersi conto che l'equazione per i coefficienti di $t^s$ avrà la forma

$$s\alpha_s = P_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}) \tag{2.26}$$

dove $P_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1})$ è un'espressione algebrica contenente monomi

costruiti moltiplicando in modo opportuno gli argomenti.[17] Il sistema permette, in linea di principio, di determinare tutti i coefficienti dello sviluppo di $x(t)$. In effetti, la prima equazione dà $\alpha_1$; sostituendo il valore così trovato nella seconda equazione si determina $\alpha_2$, e così via, grazie al fatto che il termine di destra di ciascuna equazione contiene solo dei coefficienti $\alpha$ che sono già stati determinati.

L'aspetto formale risulta dunque chiaro. Dobbiamo ora occuparci del problema della convergenza. Ma per discuterlo occorre richiamare qualche proprietà delle serie di potenze.

### *2.4.2 Una digressione: le serie di potenze e le funzioni analitiche.*

La domanda che si pone è se una serie della forma

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{k\geq 0} a_k(x - x_0)^k \tag{2.27}$$

dove $a_0, a_1, \ldots$ sono numeri reali, sia o no convergente. Ad una tale espressione si dà il nome di *serie di potenze*. Non si perde di generalità se si assume $x_0 = 0$, e quindi faremo senz'altro riferimento a questo caso.

Lo studio della convergenza delle serie di potenze conduce in modo naturale a considerare valori complessi delle variabili, e non solo numeri reali. Vale la seguente

**Proposizione 2.4:** *Se la serie di potenze $\sum_{k\geq 0} a_k x^k$ converge per un fissato $x = \xi \in \mathbb{C}$ allora è anche assolutamente convergente all'interno del cerchio di raggio $|\xi|$ e centro nel punto* 0.

**Dimostrazione.** Se $\sum_{k\geq 0} a_k \xi^k$ è convergente allora esiste una costante reale positiva $M$ tale che $|a_x k \xi^k| < M$ per $k \geq 0$; ciò perché il termine generale della serie deve tendere a zero. Sia ora $|x| < |\xi|$. Allora la serie $\sum_{k\geq 0} |a_k x^k|$ è maggiorata dalla serie geometrica convergente $\sum_{k\geq 0} M \bigl|x/\xi\bigr|^k$, e quindi è essa stessa convergente. *Q.E.D.*

Vale anche l'affermazione opposta, ossia che *se la serie di potenze (2.27) diverge per un valore fissato $x = \xi$ allora è divergente anche per $|x| > |\xi|$*. Basta infatti osservare che se la serie convergesse per un $x$ soddisfacente $|x| > |\xi|$ allora convergerebbe anche per $x = \xi$, per la proposizione che abbiamo appena dimostrato.

Se ne ricava facilmente la seguente

**Proposizione 2.5:** *Per ogni serie di potenze esiste un numero reale $R \geq 0$ tale che la serie è assolutamente convergente per $|x| < R$ ed è divergente per $|x| > R$. Nulla si può affermare invece nel caso $|x| = R$.*

---

[17] Una riflessione più attenta permetterà anche di prevedere esattamente la forma di $P_s$: il fattore $\varphi_k$, con $k = 1, \ldots, s-1$, viene moltiplicato per la somma di monomi formata da tutti i possibili prodotti di $k$ coefficienti scelti tra $\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}$ in modo che la somma degli indici di ciascun monomio sia pari ad $s - 1$. Ad esempio, nell'equazione per $\alpha_5$ il coefficiente $\varphi_1$ moltiplica $\alpha_4$, il coefficiente $\varphi_2$ moltiplica $\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1$, il coefficiente $\varphi_3$ moltiplica $\alpha_1\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_1 + \alpha_2\alpha_1\alpha_1 z$, ed il coefficiente $\varphi_4$ moltiplica $\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_1$.

Il numero $R$ è detto *raggio di convergenza* della serie di potenze. I casi $R = 0$ (la serie diverge per qualunque $x \in \mathbb{C}$) o $R = +\infty$ (la serie converge in tutto il piano complesso) non sono esclusi. Per determinare il raggio di convergenza si può far uso di una delle formule

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}\ , \\ \frac{1}{R} &= \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\ . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Una funzione rappresentata da uno sviluppo in serie di potenze con raggio di convergenza positivo è detta *funzione analitica*.

### 2.4.3 *Esempi di funzioni analitiche*

Esempi tipici di serie di potenze sono gli sviluppi in serie di Taylor di funzioni che abbiano infinite derivate. Ecco alcuni esempi comuni, che si trovano del resto nei trattati di Analisi.

(i) La funzione esponenziale

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}\ ,$$

che ha raggio di convergenza infinito, ed è dunque definita in tutto il piano complesso.

(ii) Le funzioni trigonometriche seno e coseno

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\ , \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\ , \end{aligned}$$

anch'esse con raggio di convergenza infinito.

(iii) Il binomio di Newton

$$(1+x)^q = 1 + \binom{q}{1}x + \binom{q}{2}x^2 + \binom{q}{3}x^3 + \ldots = \sum_{k\geq 0} \binom{q}{k} x^k\ ,$$

dove

$$\binom{q}{k} = \frac{q\cdot(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-k+1)}{k!}\ , \quad k \geq 0$$

è il coefficiente binomiale, ed $q$ è un numero reale. Il raggio di convergenza di questa serie è $R = 1$. Ciò si ricava rapidamente applicando la seconda delle (2.28):

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{\binom{q}{k+1}}{\binom{q}{k}}\right| = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{q-k}{k+1}\right| = 1\ .$$

Alcuni casi di uso comune, che passiamo ad elencare singolarmente, rientrano in quello generale della serie del binomio di Newton.

(iv) La serie geometrica, con la corrispondente a segni alterni

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{k\geq 0} x^k \ ,$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{k\geq 0} (-1)^k x^k \ .$$

(v) La serie della radice e la sua inversa[18]

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots$$

### 2.4.4 *Funzioni con infinite derivate, ma non analitiche*

Gli esempi appena riportati inducono a pensare che qualunque funzione che in un punto ammetta infinite derivate si possa rappresentare mediante uno sviluppo in serie di potenze convergente nell'intorno di quel punto. Ciò è falso, come passiamo ad illustrare con un paio di esempi classici.

Come primo esempio consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{per } x \neq 0\ , \\ 0 & \text{per } x = 0\ . \end{cases} \tag{2.29}$$

La funzione risulta essere continua su tutto l'asse reale, incluso il punto $x = 0$. Calcolando le sue derivate si trova

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2!}{x^3} f(x) \\ f''(x) &= -\frac{3!}{x^4} f(x) + \frac{2!}{x^3} f'(x) \\ f'''(x) &= \frac{4!}{x^5} f(x) - 2\frac{3!}{x^4} f'(x) + \frac{2!}{x^3} f''(x) \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{5!}{x^6} f(x) + 3\frac{4!}{x^5} f'(x) - 3\frac{3!}{x^4} f''(x) + \frac{2!}{x^3} f'''(x) \end{aligned}$$

e così via. Con uno sforzo di immaginazione si vede che la derivata di ordine $n$ qualsiasi si può calcolare mediante la formula ricorrente

$$f^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n+1-j} \binom{n-1}{j} \frac{(n+1-j)!}{x^{n+2-j}} f^{(j)}(x) \ ,$$

[18] Non è possibile sviluppare la funzione $\sqrt{x}$ intorno ad $x = 0$, perché ivi la sua derivata è infinita.

a partire dal primo termine $f^{(0)}(x) = f(x)$. La verifica della correttezza di questa formula è un facile esercizio di dimostrazione per induzione.[19] Se per tutte queste funzioni si pone $f^{(n)}(0) = 0$ si conclude che la funzione $f(x)$ è derivabile infinite volte in $x = 0$, e che tutte le derivate sono continue su tutta la retta reale. Dunque, lo sviluppo di Taylor in un intorno dell'origine ha coefficienti tutti nulli, e definisce una funzione identicamente nulla su tutta la retta reale, ben diversa dalla funzione $f(x)$ che stiamo considerando.

Come secondo esempio consideriamo la funzione

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x^2}}{1+t}\,dt \ . \tag{2.30}$$

Si tratta evidentemente di una funzione continua su tutto l'asse reale, pur di definire

[19] Per $n = 1$ si trova $f^{(1)} = (-1)^2 \binom{0}{0} \frac{2}{x^3} f^{(0)}$, che è l'espressione della derivata prima appena calcolata. Per $n > 1$ si pone $n-1$ al posto di $n$, e si trova

$$f^{(n-1)}(x) = \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{n-j} \binom{n-2}{j} \frac{(n-j)!}{x^{n+1-j}} f^{(j)}(x) \ .$$

Derivando quest'ultima espressione si calcola

$$\begin{aligned} \frac{df^{(n-1)}}{dx} &= \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{n+1-j} \binom{n-2}{j} \frac{(n+1-j)!}{x^{n+2-j}} f^{(j)}(x) \\ &\qquad + \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{n-j} \binom{n-2}{j} \frac{(n-j)!}{x^{n+1-j}} f^{(j+1)}(x) \ . \end{aligned}$$

Nella seconda somma si fa correre l'indice da 1 a $n-1$; ciò si ottiene sostituendo ovunque $j-1$ al posto di $j$, e si trova

$$\begin{aligned} \frac{df^{(n-1)}}{dx} &= \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{n+1-j} \binom{n-2}{j} \frac{(n+1-j)!}{x^{n+2-j}} f^{(j)}(x) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+1-j} \binom{n-2}{j-1} \frac{(n+1-j)!}{x^{n+2-j}} f^{(j)}(x) \ . \end{aligned}$$

Combiniamo ora le due somme, osservando che i termini comuni corrispondenti a $j = 1, \ldots, n-2$, differiscono solo per i coefficienti binomiali $\binom{n-2}{j}$ e $\binom{n-2}{j-1}$, e tenendo conto che

$$\begin{aligned} \binom{n-2}{j} + \binom{n-2}{j-1} &= \frac{(n-2)!}{(n-2-j)!\,j!} + \frac{(n-2)!}{(n-1-j)!\,(j-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!\,j!} = \binom{n-1}{j} \ . \end{aligned}$$

Si ottiene così l'espressione di $f^{(n)}(x)$, e questo conclude l'induzione.

$f(0) = 0$. Lo sviluppo in serie intorno a $x = 0$ si può costruire procedendo successivamente ad integrare per parti. Ecco uno schema utile.

Definiamo

$$f_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x^2}}{(1+t)^n}\, dt \ ;$$

anche questa è una funzione continua su tutto l'asse reale, pur di definire $f_n(0) = 0$. Con un'integrazione per parti troviamo la formula

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x^2}}{(1+t)^n}\, dt = -\frac{x^2\, e^{-t/x^2}}{(1+t)^n}\bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{nx^2\, e^{-t/x^2}}{(1+t)^n+1}\, dt \tag{2.31}$$

Osservando che vale

$$\lim \frac{e^{-t/x^2}}{(1+t)^n} = \begin{cases} 0 & \text{per } t \to 0\ , \\ 1 & \text{per } t \to +\infty \end{cases}$$

otteniamo subito la formula ricorrente

$$f_1(x) = f(x)\ , \quad f_n(x) = x^2 - nx^2\, f_{n+1}(x)\ . \tag{2.32}$$

Applicando ricorsivamente questa formula si trova

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - x^2\, f_2(x) \\ &= x^2 - x^4 + 2x^4\, f_3(x) \\ &= x^2 - x^4 + 2x^6 - 3!\, x^6\, f_4(x) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

e dopo $n$ passi si può scrivere la formula, analoga a quella di Taylor,

$$f(x) = x^2 - x^4 + 2x^6 - 3!\, x^8 + 4!\, x^{10} - \ldots + (-1)^n (n-1)!\, x^{2n} + R_n(x)\ , \tag{2.33}$$

dove

$$R_n(x) = n!\, x^{2n} \int_0^{+\infty} \frac{nx^2\, e^{-t/x^2}}{(1+t)^n+1}\, dt\ .$$

Si conclude subito che la funzione $f(x)$ possiede infinite derivate continue su tutto l'asse reale, e che il suo sviluppo in serie di potenze si ottiene semplicemente mandando $n$ all'infinito nella (2.33). Ma basta applicare il primo dei criteri (2.28) per rendersi conto che il raggio di convergenza di questa serie è nullo.

Il fatto interessante è che lo sviluppo non è affatto inutile. È interessante citare, a questo proposito, un brano tratto dal secondo volume dei *Méthodes Nouvelles* di Poincaré.[45] Vi si parla degli sviluppi in serie in uso nell'astronomia, tipicamente divergenti ma comunque utili per il calcolo, e spesso applicati senza porsi il problema della convergenza in termini rigorosi.[20]

---

[20] “ Tra i geometri (oggi si direbbe piuttosto gli analisti, *n.d.a.*) e gli astronomi c'è un certo malinteso sul significato del termine *convergenza*. I geometri, interessati al rigore assoluto e spesso troppo indifferenti alla lunghezza dei calcoli inestricabili di cui concepis-

“ *Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les vingt premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment.*

*Ainsi, pour prendre un exemple simple, considérons les deux séries qui ont pour terme général*

$$\frac{1000^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \quad \text{et} \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1000^n} \,.$$

*Les géomètres diront que la première série converge, et même qu'elle converge rapidement, parce que le millionième terme est beaucoup plus petit que le* 999 999$^{\mathrm{e}}$*; mais ils regarderont la seconde come divergente, parce que le terme général peut croître au delà de toute limite.*

*Les astronomes, au contraire, regarderont la première série comme divergente, parce que les* 1000 *premiers termes vont en croissant; et la seconde*

---

cono la possibilità, senza per questo sognarsi di intraprenderli davvero, dicono che una serie è convergente se la somma dei termini tende ad un limite ben definito, e ciò anche se i primi termini decrescono in modo estremamente lento. Gli astronomi, al contrario, usano affermare che una serie converge se, diciamo, i primi venti termini diminuiscono molto rapidamente, anche se i termini successivi crescono indefinitamente.

Così, per fare un semplice esempio, consideriamo le due serie che hanno come termine generale

$$\frac{1000^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \quad \text{e} \quad \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1000^n} \,.$$

I geometri diranno che la prima serie converge, e pure rapidamente, perché il milionesimo termine è ben più piccolo del 999 999$^{\mathrm{o}}$; essi classificheranno invece la seconda serie come divergente, perché il termine generale cresce oltre ogni limite.

Al contrario, gli astronomi considereranno la prima serie come divergente, perché i primi 1000 termini sono crescenti, mentre classificheranno la seconda serie come convergente perché i primi 1000 termini decrescono, e all'inizio la diminuzione è molto rapida.

Ambedue le regole sono legittime: la prima nella ricerca teorica, la seconda nelle applicazioni numeriche. Ambedue devono regnare, ma in domini separati da confini che dovremmo conoscere in modo ben preciso.

......

Il primo esempio che abbia messo in evidenza la legittimità di certi sviluppi divergenti è quello classico della serie di Stirling. Cauchy ha mostrato che i termini di quella serie prima decrescono, e poi iniziano a crescere, sicché la serie diverge; ma arrestando il calcolo al termine più piccolo si rappresenta la funzione Euleriana con un'approssimazione sempre migliore al crescere dell'argomento.“

*comme convergente, parce que les* 1000 *premiers termes vont en décroissant et que cette décroissance est d'abord très rapide.*

*Les deux règles sont légitimes : la première, dans les récherches théoriques; la séconde, dans les applications numériques. Toutes deux doivent régner, mais dans deux domaines séparés et dont il importe de bien connaître les frontières.*

......

*Le premier exemple qui a montré clairement la légitimité de certains développements divergentes est l'exemple classique de la série de Stirling. Cauchy a montré que les termes de cette série vont d'abord en décroissant, puis en croissant, de sorte que la série diverge; mais si l'on s'arrête au terme le plus petit, on répresente la function eulérienne avec une approximation d'autant plus grande que l'argument est plus grand.* ”

La serie che abbiamo costruito sopra è del tipo descritto da Poincaré. Ne facciamo uso per riesporre in termini quantitativi l'ultima frase della citazione. La formula (2.33) è esatta, e ci consente comunque di calcolare il valore della funzione $f(x)$ a meno del resto $R_n(x)$. Se poi valutiamo il resto troviamo

$$|R_n(x)| < n!\,x^{2n} \int_0^{+\infty} e^{-t/x^2}\,dt = n!\,x^{2n}\ .$$

Osserviamo che se fissiamo $x$ e facciamo crescere $n$ il resto prima decresce, ed anche rapidamente, fin che $n < 1/x^2$, poi inizia a crescere in modo esplosivo. Se dunque tronchiamo lo sviluppo al più al termine $n = 1/x^2$ possiamo calcolare il valore della funzione con una precisione che diventa particolarmente buona quando $x$ diventa molto piccolo. Serie di questo tipo si chiamano *asintotiche*, e pur essendo divergenti sono di grande utilità nel calcolo numerico.

### *2.4.5 Proprietà delle serie di potenze*

Veniamo infine alle proprietà delle serie di potenze di cui faremo uso in seguito, rimandando ai testi di Analisi per le dimostrazioni.

**Proposizione 2.6:** *Sia*

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$$

*la funzione analitica definita da una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Allora:*

*(i) $f(x)$ è funzione continua nell'intervallo aperto $(-R, R) \subset \mathbb{R}$;*

*(ii) $f(x)$ ammette infinite derivate, che possono essere calcolate derivando la serie termine a termine; la serie delle derivate ha anch'essa raggio di convergenza $R$;*

*(iii) $f(x)$ può essere integrata termine a termine, e la serie risultante ha anch'essa raggio di convergenza $R$.*

*(iv) se per una seconda funzione analitica $g(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k$ vale $g(x) = f(x)$ per $|x| < R'$, con $0 < R' \leq R$, allora le due rappresentazioni in serie per $f(x)$ e $g(x)$ coincidono.*

La proprietà (iii) risulta utile per determinare lo sviluppo in serie di alcune funzioni. Ad esempio, usando gli sviluppi riportati sopra si possono calcolare le serie del logaritmo, dell'arcotangente e dell'arcoseno:

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int \frac{dx}{1+x} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdot\,,\\ \arctan x &= \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \ldots\,,\\ \arcsin x &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots\,.\end{aligned}$$

### *2.4.6 Il metodo delle maggioranti di Cauchy*

Siano date due serie di potenze formali

$$f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k\ ,\quad g(x) = \sum_{k\geq 0} b_k x^k\ .$$

Diremo che la serie $g(x)$ è maggiorante di $f(x)$, e scriveremo $f \prec g$, se i coefficienti soddisfano $|a_k| \leq b_k$ per ogni $k \geq 0$. Ciò implica, naturalmente, $b_k \geq 0$.

Dalla definizione si deducono facilmente seguenti le proprietà.

(i) Se $f_1 \prec g_1$ e $f_2 \prec g_2$ allora $f_1 + f_2 \prec g_1 + g_2$, e $f_1 f_2 \prec g_1 g_2$.

(ii) Se $f \prec g$ allora

$$\frac{df}{dx} \prec \frac{dg}{dx}\ ,\quad \int_0^x f(\xi)\,d\xi \prec \int_0^x g(\xi)\,d\xi\ .$$

Tutte le operazioni vanno intese in senso formale. In particolare, è essenziale nella proprietà (ii) che il limite inferiore di integrazione sia zero, cioè che non vengano aggiunte costanti arbitrarie.

La proprietà rilevante ai fini della convergenza è espressa dal seguente

**Lemma 2.7:** *Sia $f \prec g$, e supponiamo che $g(x)$ abbia raggio di convergenza $R > 0$. Allora $f(x)$ ha raggio di convergenza non inferiore a $R$.*

La facile dimostrazione è lasciata al lettore.

È degno di nota il fatto che data una serie $f(x) = \sum_{k\geq 0}$ convergente in un cerchio di raggio $R > 0$ si possa costruire in modo semplice una serie maggiorante, ricorrendo alla serie geometrica. Ciò è garantito dal seguente

**Lemma 2.8:** *Sia $f(x) = \sum_{k\geq 0}$ convergente in un cerchio di raggio $R > 0$. Allora per ogni $r$ soddisfacente $0 < r < R$ si può determinare $M > 0$ tale che la serie*

$$g(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{M}{r^k} x^k$$

*sia maggiorante di $f(x)$.*

**Dimostrazione.** Per la proposizione 2.4 la serie $f(x)$ è assolutamente convergente per ogni $x$ soddisfacente $|x| = r$, il che significa che la serie $\sum_{k\geq 0} |a_k| r^k$ è assolutamente

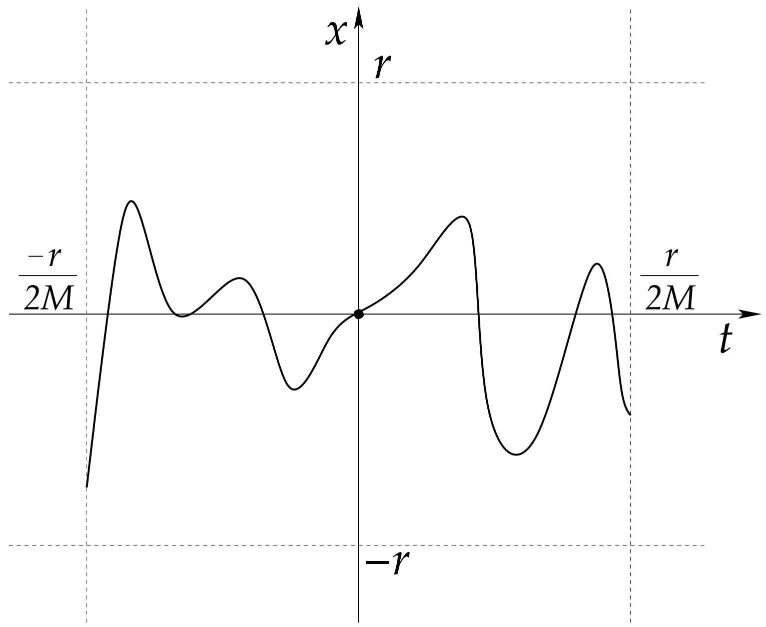


**Figura 2.8.** Illustra il teorema di esistenza ed unicità di Cauchy. Per il punto iniziale $t = 0$, $x = 0$ passa una sola soluzione analitica, la cui esistenza è garantita localmente nel rettangolo $|t| < \frac{r}{2M}$, $|x| < r$.

convergente. Allora si può determinare $M > 0$ tale che $|a_k|r^k < M$. Dunque vale $|a_k| \leq M/r^k$. *Q.E.D.*

**Corollario 2.9:** *Nelle condizioni del lemma 2.8, per ogni $|x| < r$ vale*

$$|f(x)| \leq \frac{M}{1 - |x|/r} \ .$$

La dimostrazione è un'applicazione diretta del metodo delle maggioranti di Cauchy per le serie numeriche e dell'espressione della somma della serie geometrica.

### *2.4.7 Il teorema di esistenza ed unicità di Cauchy*

Ora siamo in grado di dimostrare il teorema di Cauchy sull'esistenza ed unicità delle soluzioni per equazioni differenziali $\dot{x} = f(x)$ con secondo membro analitico. Assumiamo per semplicità che $f(x)$ sia sviluppata in serie intorno al punto $x = 0$, ma il risultato vale per qualunque punto $x_0$ ove la funzione $f$ non si annulli e sia analitica: è solo una questione di traslazione.

**Teorema 2.10:** *Sia $f(x) = \sum_{k\geq 0} \varphi_k x^k$, con $f(0) = \varphi_0 \neq 0$, analitica in un cerchio di raggio $R > 0$. Allora per ogni $r$ soddisfacente $0 < r < R$ si può determinare $M > 0$ tale che valga la seguente affermazione: l'equazione $\dot{x} = f(x)$ con condizione iniziale $x(0) = 0$ ammette un'unica soluzione $x(t)$ analitica almeno per $|t| < \frac{r}{2M}$, reale per valori reali di $t$, e soddisfacente $|x(t)| < r$ .*

Sottolineiamo il fatto che l'enunciato del teorema ha valore *locale*, come illustrato in figura 2.8. La prolungabilità della soluzione per tutti i tempi non è affatto assicurata.

La dimostrazione fa uso del seguente

**Lemma 2.11:** *Siano $f(x) = \sum_{k\geq 0} \varphi_k x^k$ e $g(x) = \sum_{k\geq 0} \gamma_k x^k$ due serie formali soddisfacenti $f \prec g$. Siano $x(t) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k t^k$ e $y(t) = \sum_{k\geq 0} \beta_k t^k$ le soluzioni formali delle equazioni $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{y} = g(y)$ soddisfacenti le condizioni iniziali $x(0) = y(0) = 0$, costruite col procedimento del paragrafo 2.4, formule (2.25) e (2.26). Allora la soluzione per $g$ è maggiorante della soluzione per $f$, ossia vale $x \prec y$.*

**Dimostrazione.** Per induzione. Scriviamo le espressioni dei coefficienti $\alpha_k$ e $\beta_k$ come si ricavano dalle formule (2.25) e (2.26):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \varphi_0\,, & \beta_1 &= \gamma_0\,,\\
\alpha_2 &= \frac{\alpha_1\varphi_1}{2}\,, & \beta_2 &= \frac{\beta_1\gamma_1}{2}\,,\\
\alpha_3 &= \frac{\alpha_2\varphi_1 + \alpha_1^2\varphi_2}{3}\,, & \beta_3 &= \frac{\beta_2\gamma_1 + \beta_1^2\gamma_2}{3}\,,\\
\alpha_4 &= \frac{\alpha_3\varphi_1 + 2\alpha_1\alpha_2\varphi_2 + \alpha_1^3\varphi_3}{4}\,, & \beta_4 &= \frac{\beta_3\gamma_1 + 2\beta_1\beta_2\gamma_2 + \beta_1^3\gamma_3}{4}\,,\\
\ldots\ \ & \ldots\,, & \ldots\ \ & \ldots\,,\\
\alpha_s &= \frac{P_s(\alpha_1,\ldots,\alpha_{s-1},\varphi_1,\ldots,\varphi_{s-1})}{s}\,, & \beta_s &= \frac{P_s(\beta_1,\ldots,\beta_{s-1},\gamma_1,\ldots,\gamma_{s-1})}{s}\,,\\
\ldots\ \ & \ldots\,, & \ldots\ \ & \ldots\,,
\end{aligned}$$

Dalla prima riga, ricordando che $|\varphi_0| \leq \gamma_0$, si ottiene immediatamente $|\alpha_0| \leq \beta_0$. Benché non sia necessario ai fini dell'induzione si può verificare direttamente che dalle righe successive si ricava $|\alpha_1| \leq \beta_1$, $|\alpha_2| < \beta_2$, &c. Infatti, i termini noti nella colonna di destra contengono solo somme e prodotti di quantità positive che sono maggioranti delle corrispondenti quantità della colonna di sinistra. Per completare l'induzione basta osservare che le espressioni per $\beta_s$ e per $\alpha_s$ sono costruite esattamente con lo stesso polinomio, fatte le dovute sostituzioni. Supponendo che $|\alpha_j| \leq \beta_j$ per $j = 1,\ldots,s-1$ si conclude immediatamente che la stessa relazione deve valere per $j = s$, il che completa l'induzione. *Q.E.D.*

Siamo ora in grado di completare la

**Dimostrazione del teorema 2.10.** Basta trovare una funzione maggiorante $g(y)$ per cui si sappia risolvere l'equazione in modo esplicito. Tale funzione è proprio quella trovata nel lemma 2.8, ossia

$$g(y) = M\sum_{k\geq 0}\left(\frac{y}{r}\right)^k = \frac{M}{1 - y/r}\ .$$

Infatti l'equazione $\dot{y} = \frac{M}{1-y/r}$ ammette la soluzione

$$y(t) = r\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2Mt}{r}}\right)\ ,$$

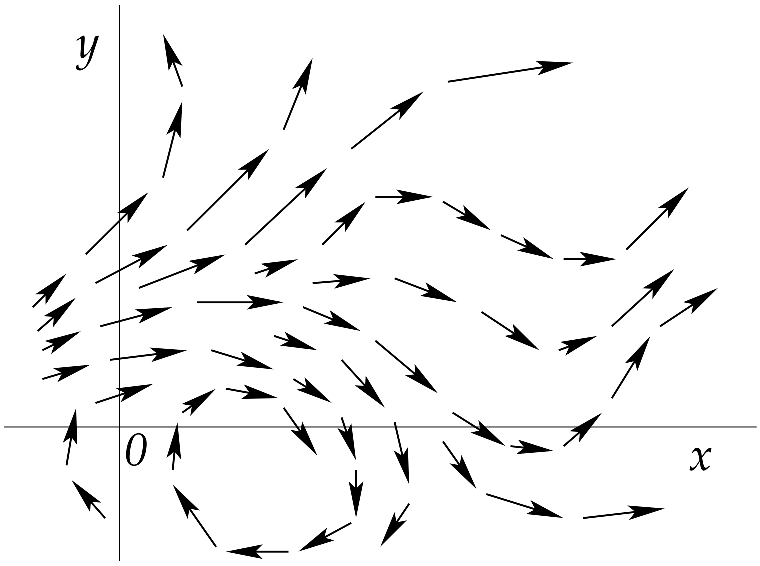


**Figura 2.9.** I secondi membri di un'equazione differenziale autonoma in $\mathbb{R}^2$ definiscono un campo vettoriale nel piano.

che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 0$.[21] La funzione a destra ammette uno sviluppo in serie di potenze in $t$ con raggio di convergenza $\frac{r}{2M}$, che per il lemma 2.11 è maggiorante della soluzione dell'equazione $\dot{x} = f(x)$ con dato iniziale $x(0) = 0$. Dunque, la serie che rappresenta la funzione $x(t)$ ha raggio di convergenza almeno pari a quello della sua maggiorante $y(t)$, ossia $\frac{r}{2M}$. All'interno del raggio di convergenza si applica il corollario 2.9, per cui si ha

$$\bigl|x(t)\bigr| \le r\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2M|t|}{r}}\right) < r\ .$$

I coefficienti dello sviluppo di $x(t)$ costruiti mediante le formule (2.25) e (2.26) sono reali, perché sono reali i coefficienti di $f(x)$, e quindi $x(t)$ a assume valori reali se $t$ è reale. Infine, le formule (2.25) e (2.26) determinano i coefficienti in modo univoco, e quindi la soluzione è unica in virtù della proprietà (iv) della proposizione 2.6. *Q.E.D.*

## 2.5 Teoremi di esistenza ed unicità locale e globale

Veniamo infine al problema più generale di sistemi di equazioni differenziali. Consideriamo una funzione $f(x,t)$ definita in $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}^n$ e ivi continua. La rappresentazione geometrica naturale per un tal sistema di equazioni differenziali si ottiene considerando $f(x,t)$ come un vettore applicato al punto $x$ all'istante $t$ assegnato. Diremo che in $\Omega$ abbiamo definito un *campo vettoriale* dipendente dal tempo.

[21] Si usa ancora la formula di quadratura (2.6), che diventa $\int_0^y \left(1 - \frac{\xi}{r}\right)\, d\xi = Mt$, ovvero $1 - \left(1 - \frac{y}{r}\right)^2 = 2Mt$. Risolvendo rispetto a $y$ si ottiene la soluzione riportata nel testo.

Nel caso autonomo possiamo sostituire $\Omega$ con $\mathscr{G} \times \mathbb{R}$, dove $\mathscr{G} \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto sul quale è definito un campo vettoriale costante. La figura 2.9 ne dà un esempio nel caso $n = 2$. La direzione del vettore $f$ nel punto $x$ dà la tangente alla curva che rappresenta la soluzione delle equazioni. Con un'immagine geometrica suggestiva si può vedere il campo vettoriale come generatore di un flusso che trasporta ciascun punto $x$ in un tempo $t$ in un nuovo punto $x(t)$.[22]

Il problema ai valori iniziali o problema di Cauchy si formula come segue: *assegnato $(x_0, t_0) \in \Omega$, determinare un intervallo aperto $\mathscr{I} = (t_1, t_2) \subset \mathbb{R}$ contenente $t_0$ ed una funzione $x$ di classe $C^1(\mathscr{I}, \mathbb{R}^n)$ soddisfacente $x(t_0) = x_0$, detta soluzione del problema, tale che per ogni $t \in \mathscr{I}$ valga*

$$\bigl(x(t), t\bigr) \in \Omega \ , \quad \dot{x}(t) = f\bigl(x(t), t\bigr) \ .$$

Il nostro scopo è quello di dare informazioni sulla soluzione del problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine. Ci limiteremo ad esporre alcuni risultati sull'esistenza, unicità e prolungabilità delle soluzioni, rimandando ai capitoli successivi una discussione più ampia. In linea di massima non riporteremo le dimostrazioni degli enunciati: per queste e per altri approfondimenti rimandiamo a testi specifici.

### *2.5.1 Il teorema di esistenza ed unicità locale*

Prima di formulare il teorema di esistenza e unicità, richiamiamo la definizione di lipschitzianità.

**Definizione 2.12:** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.*

*(i) $f$ si dice lipschitziana in $x$ uniformemente rispetto a $t$ se esiste un numero reale $K > 0$ tale che*

$$|f(x_2, t) - f(x_1, t)| < K|x_2 - x_1| \quad \forall (x_1, t), (x_2, t) \in \Omega \ .$$

*(ii) $f$ si dice localmente lipschitziana in $\Omega$ uniformemente in $t$ se ogni punto di $\Omega$ possiede un intorno nel quale vale la diseguaglianza precedente, eventualmente con costanti di Lipschitz diverse da punto a punto.*

È utile la seguente

**Proposizione 2.13:** *$f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ implica $f$ localmente lipschitziana in $x$ uniformemente rispetto a $t$.*

Veniamo ora all'enunciato del teorema di esistenza e unicità locale.

**Teorema 2.14:** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ed $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ che soddisfi le proprietà*

*(i) continua in $\Omega$ ;*

*(ii) localmente lipschitziana in $x$ uniformemente rispetto a $t$ .*

*Sia $(x_0, t_0) \in \Omega$ un punto iniziale fissato. Allora esiste un intorno $\mathscr{I}_\delta(t_0) = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ ed un'unica funzione $x : \mathscr{I}_\delta(t_0) \to \mathbb{R}^n$ di classe $C^1(\mathscr{I}_\delta(t_0), \mathbb{R}^n)$ che soddisfa il problema di Cauchy*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \ , \quad x(t_0) = x_0 \ .$$

---

[22] Tale immagine può formalizzarsi in modo preciso fondandosi sul concetto di *gruppo ad un parametro di trasformazioni*. Si veda ad esempio [3].

Abbiamo già visto la dimostrazione di questo teorema, sia pure per il caso semplificato di una sola variabile dipendente, nella forma in cui venne dimostrato da Cauchy nei primi anni venti del XIX secolo, sotto l'ipotesi di analiticità del secondo membro. La dimostrazione sotto ipotesi di semplice regolarità fu completata sempre da Cauchy qualche anno più tardi, in una forma alquanto differente da quella attuale. Il teorema e la sua dimostrazione hanno acquistato una forma definitiva nei primi anni del XX secolo, dopo un lavoro di perfezionamento durato alcuni decenni, e che ha richiesto i contributi di matematici quali Lipschitz, Liouville, Picard, Peano.[23]

Non riportiamo la dimostrazione del teorema, tuttavia aggiungiamo le seguenti osservazioni, rinviando ai testi di Analisi per i dettagli. L'interesse della prova del teorema di esistenza ed unicità per il problema ai valori iniziali risiede nel fatto che essa viene ricondotta ad un problema di punto fisso; ovvero ad un problema in cui è assegnata una certa mappa $T$ e si vogliono determinare le o la soluzione dell'equazione $T(x) = x$. Il problema di Cauchy si riconduce ad un problema di punto fisso, perché, come facilmente si riconosce, esso è equivalente al seguente: *determinare una funzione $x$ di classe $C^0(\mathscr{I}, \mathbb{R}^n)$ soluzione dell'equazione integrale (detta di Volterra di seconda specie)*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \qquad t_0 \in (t_1, t_2)\ .$$

Nel nostro caso, la mappa $T$ di cui si cerca il punto fisso è data da

$$\big[T(x)\big](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

ed agisce sullo spazio di funzioni $C^0(\mathscr{I}, \mathbb{R}^n)$, dove $\mathscr{I}$ è un opportuno intervallo.

Una condizione sufficiente perché una mappa in uno spazio metrico abbia un punto fisso è fornita dal seguente teorema, detto di Banach-Caccioppoli.[24]

**Teorema 2.15:** *Sia $(M, \mathrm{dist})$ uno spazio metrico completo;*[25] *sia poi $f : M \to M$*

---

[23] Joseph Liouville, nato a Saint-Omer, Francia, 24 marzo 1809; morto a Parigi, 8 settembre 1882.
Charles Emile Picard, nato a Parigi, 24 luglio 1856; morto a Parigi, 11 dicembre 1941.
Giuseppe Peano, nato a Cuneo, 27 agosto 1858; morto a Torino, 20 aprile 1932.

[24] Stefan Banach, nato a Kraków (Cracovia, allora in Austria–Ungheria, oggi in Polonia), 30 marzo 1892; morto a Lvov, oggi in Ucraina, 31 agosto 1945.
Renato Caccioppoli, nato a Napoli, 20 gennaio 1904; morto a Napoli, 8 maggio 1959.

[25] Ossia uno spazio su cui sia definita la distanza tra due punti $\mathrm{dist}(x, y)$ come funzione positiva che si annulla se e solo se i due punti coincidono, e che soddisfa la diseguaglianza triangolare secondo la quale la lunghezza di un lato di un triangolo non supera la somma delle lunghezze degli altri due. Un esempio elementare è la distanza Euclidea in $\mathbb{R}^n$, definita come $\mathrm{dist}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$. Se si considerano funzioni reali $f(t)$, $g(t)$ definite su un intervallo comune $[a, b]$ si può considerare ad esempio la distanza $\mathrm{dist}(f, g) = \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$. Lo spazio si dice completo se ogni successione di Cauchy ammette limite.

*una mappa contrattiva, tale cioè che* $\mathrm{dist}(f(x_1), f(x_2)) < k\,\mathrm{dist}(x_1, x_2)$ *con* $k$ *costante reale positiva,* $k < 1$*. Allora l'equazione di punto fisso* $f(x) = x$ *ammette una ed una sola soluzione.*

A questo punto la dimostrazione del teorema di esistenza e unicità consiste nel restringere opportunamente l'intervallo $\mathscr{I}$ e la sua immagine $x(\mathscr{I})$ che compaiono nello spazio di funzioni continue nel quale si cercano le soluzioni del problema di punto fisso per $T$, affinché in esso possano essere soddisfatte le ipotesi del teorema di Banach-Caccioppoli, ovvero la mappa $T$ risulti una contrazione.

Una seconda osservazione riguarda il ruolo delle ipotesi del teorema, continuità e lipschitzianità del secondo membro. Nella dimostrazione delineata, che fa uso del teorema di punto fisso di Banach, l'ipotesi che la funzione $f$ sia di classe Lipschitz è apparentemente essenziale anche per ottenere l'esistenza della soluzione; tuttavia un teorema di Peano della fine del secolo XIX, che fa uso di tecniche completamente differenti, consente di garantire l'esistenza della soluzione sotto l'ipotesi della sola continuità, mentre abbiamo già visto con esempi che in presenza della sola continuità uno stesso problema di Cauchy può avere anche infinite soluzioni. Anche per questi argomenti si rinvia alla letteratura specialistica sulle equazioni differenziali.

### *2.5.2 Il problema del prolungamento*

Veniamo ora alla questione del prolungamento di una soluzione. Il teorema di esistenza e unicità citato fornisce un risultato solo locale, cioè non consente di garantire l'esistenza (o la non esistenza) di una soluzione su un intervallo *prefissato*. D'altra parte in gran parte delle applicazioni non è possibile determinare in modo esplicito la soluzione, ed è utile sapere a priori, cioè senza avere determinato esplicitamente la soluzione, quale sia l'intervallo massimale di esistenza della soluzione. In particolare è interessante sapere se la soluzione esiste per tutti i tempi, almeno nel futuro. Diamo qui solo un paio di risultati e qualche esempio, a titolo di orientamento sulla questione e per futura utilità.

Intanto osserviamo che se $x$ è la soluzione la cui esistenza è accertata grazie al teorema di esistenza e unicità, essa può essere *sempre* prolungata ad un intervallo più grande di quello che compare nel teorema medesimo. Infatti basta scegliere come punto iniziale di un nuovo problema di Cauchy proprio il punto $\big(x(t_0+\delta), t_0+\delta\big) \in \Omega$. Poiché $\Omega$ è aperto, questo è punto iniziale di un problema di Cauchy per il quale valgono ancora le ipotesi del teorema. Così proseguendo si ottiene una *soluzione massimale destra*, e analogamente si definisce una *soluzione massimale sinistra*, e infine una *soluzione massimale*, definita su un intervallo $(t_{\min}, t_{\max})$ per il problema di Cauchy assegnato.

Vale allora il seguente teorema, detto *della striscia*.

**Teorema 2.16:** *Data la striscia* $S = \mathbb{R}^n \times (t_1, t_2)$, *sia* $f : \overline{S} \to \mathbb{R}^n$ *una funzione soddisfacente le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale con* $\Omega = S$*. Se inoltre esistono due costanti positive* $M$ *ed* $N$ *tali che*

$$|f(t,x)| \le M|x| + N \qquad \forall (x,t) \in S\ ,$$

*allora la soluzione* $x$ *è definita su tutto* $(t_1, t_2)$ .

Naturalmente se la base della striscia, ovvero l'intervallo $(t_1, t_2)$, può essere scelta arbitrariamente, allora la soluzione esiste su tutto $\mathbb{R}$, poiché esiste su tutti i suoi sottointervalli limitati.

Dunque la crescita ammissibile per il secondo membro (ferme restando le altre ipotesi) è al più lineare nella variabile $x$. Si dice in questo caso, che la funzione $f$ è *sublineare*. Un caso significativo che rientra sotto questa condizione è naturalmente quello in cui il secondo membro $f$ sia limitato.

Vale la seguente semplice e comoda

**Proposizione 2.17:** *Se $f \in C^1(\overline{S}, \mathbb{R}^n)$ e tutte le derivate parziali di $f$ rispetto alle variabili $x_1, \ldots, x_n$ sono limitate in $\overline{S}$, allora $f$ è sublineare.*

Illustriamo l'applicazione del teorema della striscia con due esempi. Consideriamo per primo il problema di Cauchy

$$\dot{x} = \sin\bigl[t(1 - x^2)\bigr] \ , \quad x(0) = x_0 \ ,$$

e mostriamo che ha soluzioni definite su tutto l'asse reale. Infatti il secondo membro è definito su ogni striscia $S = \mathbb{R} \times (t_1, t_2)$, dove soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale; inoltre è una funzione limitata su $\mathbb{R}^2$, e quindi soddisfa le ipotesi del teorema della striscia. Ne segue che la soluzione è definita su ogni intervallo $(t_1, t_2)$ contenente l'origine e quindi su tutto $\mathbb{R}$ .

Come secondo esempio consideriamo il problema di Cauchy

$$\dot{x} = t^2 \exp(-t - x^2) \ , \quad x(t_0) = x_0 \ .$$

Anche in questo caso vale l'esistenza e l'unicità locale per ogni punto della striscia $S = \mathbb{R} \times (t_1, t_2)$ . Inoltre

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \le \bigl| t^2 \exp(-t) \bigr| \, \bigl| 2x \exp(-x^2) \bigr| \le C \sqrt{\frac{2}{e}}$$

dove C è il massimo della funzione $h(t) = \bigl| t^2 \exp(-t) \bigr|$ sull'intervallo $[t_1, t_2]$ , e $\sqrt{2/e}$ è il massimo su $\mathbb{R}$ della funzione $g(x) = \bigl| -2x \exp(-x^2) \bigr|$ . Dunque il secondo membro dell'equazione differenziale è sublineare in ogni striscia $\mathbb{R}^n \times [t_1, t_2]$ , e pertanto la soluzione esiste su tutto $\mathbb{R}$ .

Tuttavia non sempre la funzione a secondo membro dell'equazione, come richiesto dal teorema della striscia, è globalmente sublineare. È spesso utile, allora la seguente

**Proposizione 2.18:** *Sia dato il problema di Cauchy*

$$\dot{x} = f(x, t) \ , \quad x(t_0) = x_0$$

*con $f$ definita in $\Omega = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Valgano per esso le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale e sia $x$ la sua soluzione massimale. Allora se esistono costanti reali e positive tali che*

$$\bigl| x(t) \bigr| \le C_1 + C_2(t - t_0) \quad \forall t \in [t_0, t_{\max})$$

*allora $t_{\max} = +\infty$ .*

Un enunciato analogo vale per $t_{\min}$

Il teorema ha come sua ipotesi fondamentale una cosiddetta *maggiorazione a priori*, cioè una informazione sulla crescita della soluzione indipendente dalla conoscenza della forma esplicita della soluzione medesima. Come sia possibile ottenere una tale informazione lo vediamo nel seguente esempio, con il quale siamo già familiari. Consideriamo il modello logistico, descritto dal problema di Cauchy

$$\dot{x} = x(1-x) \ , \quad x(0) = x_0 \ .$$

Come sappiamo questa equazione ammette le due soluzioni costanti $x(t) = 0$ e $x(t) = 1$. Consideriamo ora dati iniziali con $0 < x_0 < 1$ Per unicità, la soluzione del problema di Cauchy corrispondente a questi dati non può raggiungere le rette $x = 0$ e $x = 1$, e dunque è limitata. Perciò soddisfa le ipotesi del teorema precedente ed è definita su tutto $\mathbb{R}$. Notiamo che in questo caso il secondo membro è quadratico e non potrebbe applicarsi il teorema della striscia.

Consideriamo infine il caso notevole dell'equazione di Newton per una particella puntiforme soggetta ad una forza conservativa. *Sia $x$ la posizione della particella e $V(x)$ l'energia potenziale corrispondente alla forza $F(x)$. Supporremo $V$ inferiormente limitata. Allora la soluzione dell'equazione di Newton*

$$m\ddot{x} = F(x) = -\nabla V(x)$$

*esiste per tutti i tempi.*

Ciò è conseguenza della conservazione dell'energia, di cui ci occuperemo in modo più esteso nei prossimi capitoli. Possiamo però anticipare l'informazione rilevante. L'energia

$$E = \frac{1}{2} m \big[\dot{x}(t)\big]^2 + V(x(t))$$

si mantiene costante durante l'evoluzione del sistema. Di conseguenza, detto $\overline{V}$ l'estremo inferiore di $V(x)$, si ha

$$|\dot{x}(t)| \leq \sqrt{\frac{2}{m}(E - \overline{V})} \ ,$$

e dunque

$$|x(t)| \leq |x_0| + (t - t_0)\sqrt{\frac{2}{m}(E - \overline{V})} \ .$$

Ora l'equazione del secondo ordine di Newton può ridursi ad un sistema del primo ordine tramite l'introduzione dell'incognita ausiliaria $\dot{x} = y$, e le due ultime diseguaglianze consentono di applicare la proposizione 2.18 al sistema così ottenuto e di concludere che la sua soluzione esiste per tutti i tempi.